SUJET G

D.S. n°3 : Suites et Probabilités (discrètes) — TS1

Jeudi 15 novembre 2012, 2h, **Calculatrices autorisées**. Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : – ± + Technique : – ± + Raisonnement : – ± +	Note : $\frac{\quad}{20}$

/4

Exercice 1.

Le secteur production de l'entreprise *Made-In-Dakar* est composée de trois catégories de personnel : les ingénieurs (I), les techniciens de production (T) et les agents de maintenance (M). Il y a 8% d'ingénieurs et 82 % de techniciens de production. Les hommes (H) représentent 76 % des ingénieurs, 53 % des techniciens de production et 62 % des agents de maintenance.

Mehdi présente à Aïman sa cousine Lina, qui travaille dans cette entreprise. Aïman se demande quelle est la probabilité que Lina soit ingénieure.

Donner une valeur arrondie à 10^{-3} près de cette probabilité .

/16 **Exercice 2.**

Partie A : Restitution Organisée de Connaissances

On suppose connus les résultats suivants :

- Une suite *converge vers* ℓ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- Une suite est *minorée par le réel m* si et seulement si tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à m.

Remarque : Le résultat « Une suite croissante et convergente est majorée par sa limite. » n'est PAS supposé connu.

/2 Montrer qu'une suite décroissante et convergente est minorée par sa limite.

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x)=0{,}1(x+4)^2-4$ et soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=f(u_n)=0{,}1(u_n+4)^2-4 \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

/1 **1)** Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

/2 **2) a)** Tracer $\mathscr{C}$, la courbe la courbe représentative de la fonction f puis, sans faire aucun calcul, sur le graphique, placer sur l'axe des abscisses $u_o, u_1, u_2, u_3,$ et $u_4.$ Faire apparaître les traits de construction.

/0,5 **b)** Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

3) Dans cette question, nous allons démontrer les conjectures formulées à la question 2.b.

/2 **a)** Démontrer, par un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $-4\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$.

/1 **b)** Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

/0,75 **c)** Notons ℓ la limite de la suite (u_n), démontrer que ℓ vérifie l'égalité $0{,}1(\ell+4)^2-4=\ell$.

/0,75 **d)** En déduire la valeur de ℓ.

Partie C

4) Soit p un entier naturel.

/0,5 **a)** Pourquoi peut-on affirmer que la limite ℓ est un minorant de (u_n) ?

/2 **b)** Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $\ell\leqslant u_n<\ell+10^{-p}$?

/1,5 **c)** On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0 vérifiant cette condition. Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier pour la valeur $p=2$. *Expliquez.*

/2 **d)** Écrire un algorithme (sur votre copie) qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $\ell\leqslant u_n<\ell+10^{-p}$.

/1 **5)** ***Bonus*** *(donc Hors-barème).* Montrer que ℓ est le plus grand des minorants de (u_n). (En ce sens, ℓ est le meilleur des minorants de (u_n).)

Exercice 2.

Partie A : Restitution Organisée de Connaissances

Raisonnons par l'absurde : Supposons que la limite ℓ de (u_n) ne soit pas un minorant de (u_n). Cela veut dire qu'il existe au moins un terme de la suite, notons-le u_{n_0}, qui est strictement inférieur à ℓ. (En effet, la négation de « $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \ell$ » est « $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < \ell$ »).

$u_{n_0} < \ell < \ell + 1$ donc l'intervalle $]u_{n_0} ; \ell + 1[$ est un intervalle ouvert contenant ℓ. Par définition de la limite (voir énoncé), il devrait donc contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. En particulier, il devrait contenir un nombre infini de termes de la suite.

Or, la suite étant décroissante, $\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant u_{n_0}$ donc $\forall n \geqslant n_0, u_n \notin]u_{n_0} ; \ell + 1[$ donc l'intervalle $]u_{n_0} ; \ell + 1[$ contient au plus les termes dont l'indice est inférieur à n_0 (pas forcément tous), càd un nombre fini de termes. On aboutit donc à une contradiction si on suppose que la limite ℓ de (u_n) n'est pas un minorant de (u_n), ce qui prouve que la limite ℓ de (u_n) est un minorant de (u_n).

Partie B

1) *Variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$* :

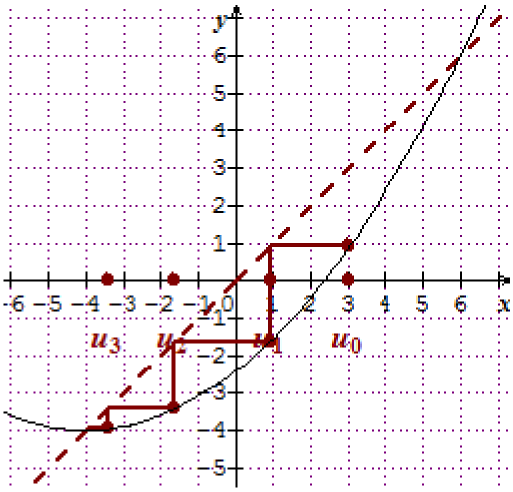
Méthode 1 : La fonction f est un trinôme du second degré donné sous forme canonique. On lit donc directement que les coordonnées du sommet sont $(-4;-4)$. Le coefficient de x^2 étant positif, sa courbe représentative est une parabole tournée vers le haut.

Méthode 2 : En calculant la dérivée de f et en étudiant son signe.

Tableau de variations de f sur sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
signe de f '(x)		$-$	0	$+$	
f		↘	-6	↗	

2) a)



f est la fonction définie par $f(x) = 0{,}1(x+4)^2 - 4$

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) = 0{,}1(u_n+4)^2 - 4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

b) La suite (u_n) semble décroissante et elle semble converger vers -4.

3) a) Notons P_n la proposition « $-4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. ».

- Initialisation : $u_0 = 3$ et $u_1 = 0{,}1(u_0+4)^2 - 4 = 0{,}1 \times 49 - 4 = 0{,}9$ donc $-4 \leqslant u_1 \leqslant u_0$: P_0 est vraie.
- Hérédité : Supposons P_n vraie pour un certain entier $n \geqslant 0$ (fixé). Par hypothèse de récurrence, on sait que $-4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. Or f est croissante sur $[-4 ;+\infty[$ donc en appliquant f à cette inégalité, on en déduit que $f(-4) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$ càd $-4 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$ et donc P_{n+1} est vraie. Ainsi, la proposition P_n est héréditaire.
- Conclusion : Par le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, càd que pour tout entier $n \geqslant 0$, $-4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

b) On vient de voir que pour tout entier $n \geqslant 0$, La $-4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. suite (u_n) est donc décroissante et minorée donc elle est convergente.

c) $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$. En passant à la limite dans l'équation $u_{n+1}=0{,}1(u_n+4)^2-4$, on obtient bien $0{,}1(\ell+4)^2-4=\ell$.

d) $0{,}1(\ell+4)^2-4=\ell \overset{(i)}{\Leftrightarrow} (\ell+4)^2-40=10\ell \Leftrightarrow \ell^2+8\ell+16-40-10\ell=0 \Leftrightarrow \ell^2-2\ell-24=0 \overset{(ii)}{\Leftrightarrow} \ell=-4$ ou $\ell=6$.

(i) en multipliant les deux membres par 10.

(ii) en calculant $\Delta=4-4\times(-24)=4\times25=2^2\times5^2=10^2>0$, les deux racines sont -4 et 6.

Or $u_0=3$ et (u_n) est décroissante donc $\ell\leqslant3$. Ceci élimine la possibilité $\ell=6$ donc $\boxed{\ell=-4}$.

<u>Partie C</u> **4)** Soit p un entier naturel.

a) D'après la partie A (la ROC), une suite décroissante et convergente est minorée par sa limite.

b) (1) $]\ell-10^{-p};\ell10^{-p}[$ est un intervalle ouvert contenant ℓ. Comme la suite (u_n) converge vers ℓ, $]\ell-10^{-p};\ell10^{-p}[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0.

(2) Par ailleurs, ℓ est un minorant de (u_n) d'après 4.a).

En regroupant (1) et (2), on a $\left.\begin{array}{ll}(1) & \forall n\in\mathbb{N},\quad \ell\leqslant u_n\\ (2) & \forall n\geqslant n_0,\quad u_n<\ell+10^{-p}\end{array}\right\}$ d'où $\forall n\geqslant n_0,\ \ell\leqslant u_n<\ell+10^{-p}$.

Commentaire au vu des copies : $[\ell;\ell+10^{-p}[$ n'est PAS un intervalle <u>ouvert</u> contenant ℓ. On ne peut donc pas lui appliquer directement la définition de la limite.

c) La condition $u_n\leqslant\ell$ étant toujours réalisée (vu au 4.a)), on n'a pas besoin de s'en préoccuper. Reste la condition $u_n<\ell+10^{-p}$. La suite étant décroissante, il suffit de trouver le plus petit entier n tel que $u_n<\ell+10^{-p}=-4+10^{-2}=-3{,}99$. Or d'après le tableau de valeurs donné par la calculatrice, $u_4=-3{,}967>-3{,}99$ et $u_5=-3{,}9998...<-3{,}99$ donc $n_0=5$.

d) *Notation : « n:=0 » signifie « n prend la valeur 0 ».*

Initialisation	$n:=0;u:=3;\ell:=-4$
Traitement	*Entrer p*
	Tant que $u_n\geqslant\ell+10^{-p}$
	Début du tant que
	$u:=0{,}1(u+4)^2-4$
	$n:=n+1$
	Fin du tant que
Sortie	*Afficher n.*

(1) *Idée (qui n'a pas à figurer sur la copie) : On part de u_0 et on calcule les termes de la suite de proche en proche jusqu'à passer en dessous de la valeur $\ell+10^{-p}$. Et de nouveau, La condition $u_n\leqslant\ell$ étant toujours réalisée (vu au 4.a)), on n'a pas besoin de s'en préoccuper.*

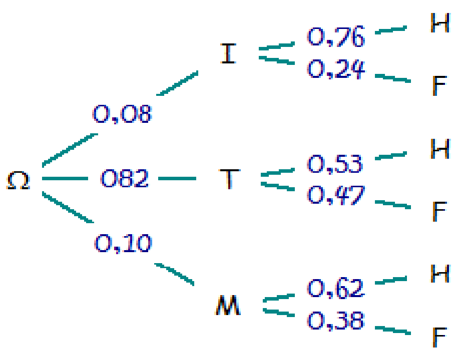
(2) *La négation de « $u_n<\ell+10^{-p}$ » est « $u_n\geqslant\ell+10^{-p}$ ».*

(3) *L'ordre de ces 2 lignes est indifférent car le calcul de u n'utilise pas la valeur de n.*

5) ***Bonus***. Idée : Montrer par l'absurde qu'aucun nombre plus grand que ℓ ne peut être un minorant. ℓ étant un minorant de (u_n), ce sera le plus grand des minorants de (u_n).

Exercice 1.

La probabilité cherchée est la probabilité qu'un employé(e) choisi au hasard dans l'entreprise soit ingénieur, sachant que cet employé(e) est une femme, càd $P_F(I)$ où F est l'événement « L'employé(e) choisi au hasard dans l'entrepris est une femme. »



Les événements I, T et M forment une partition, donc par la formule des probabilités totales :

$p(F)=p(F\cap I)+p(F\cap T)+p(F\cap M)=p(I)\times P_I(F)+p(T)\times P_T(F)+p(M)\times P_M(F)$
$=0{,}08\times0{,}24+0{,}82\times0{,}47+0{,}1\times0{,}38=0{,}4426$

$$P_F(I)=\frac{P(F\cap I)}{p(F)}=\frac{p(I)\times p_I(F)}{p(F)}=\frac{0{,}08\times0{,}24}{0{,}4426}\approx0{,}0434$$

<u>La probabilité arrondie au millième que Lina soit ingénieure est de 0,043</u>.