D.S. n°4 : Limites de fonctions	TS1

Jeudi 23 janvier 2014, 55 min, **Calculatrices autorisées**. Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : + ± − Technique : + ± − Raisonnement : + ± −	Note : $\overline{\quad 20}$

/7 **Exercice 1.**

/1,5 **1)** **ROC** : Prouver que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

/5,5 **2)** Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{3x}$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

a) Déterminer toutes les asymptotes horizontales de $\mathscr{C}_f$ s'il en existe.

b) Déterminer toutes les asymptotes verticales de $\mathscr{C}_f$ s'il en existe.

/13 **Exercice 2.**

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\,e^{\frac{1}{x}}$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

/3 **1) Variations.**

a) Prouvez que pour tout réel x non nul, $f'(x) = \dfrac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$

b) En déduire les variation de f. Dresser son tableau de variations.

/6 **2) Limites.**

a) Déterminer si elles existent les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Déterminer si elle existe la limite de la fonction f en 0 par valeurs supérieures.

c) Déterminer si elle existe la limite de la fonction f en 0 par valeurs inférieures.

d) Déterminer toutes les asymptotes horizontales de $\mathscr{C}_f$ s'il en existe.

e) Déterminer toutes les asymptotes verticales de $\mathscr{C}_f$ s'il en existe.

/4 **3) Résolution de l'équation $f(x) = -4$**

a) Prouver que l'équation $f(x) = -4$ admet une unique solution dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et en donner un encadrement à 0,1 près. On notera α cette solution.

b) Marianne souhaite écrire un algorithme pour déterminer en encadrement de α à 10^{-6} près. En effet, c'est faisable à la machine mais c'est long ! Pour les lignes 1, 3, 4 et 7, aidez-la à choisir entre les deux instructions proposées en cochant les cases correspondantes.

Par exemple, si vous pensez que pour la ligne 1, la bonne instruction est celle de la colonne de gauche, cochez la case de gauche, ce qui donne :

L1	☑ x prend la valeur -1	❑ x prend la valeur 0

Évidemment, si vous pensez que la bonne réponse est celle de la colonne de droite, cochez ainsi :

L1	❑ x prend la valeur -1	☑ x prend la valeur 0

On ne demande pas de justifications. [0,5 point par réponse juste et -0,25 point par réponse fausse]

L1	❑ x prend la valeur -1	❑ x prend la valeur 0
L2	y prend la valeur $f(x)$	y prend la valeur $f(x)$
L3	❑ Tant que $y < -4$	❑ Tant que $y > -4$
L4	❑ x prend la valeur $x + 10^{-6}$	❑ x prend la valeur $x - 10^{-6}$
L5	y prend la valeur $f(x)$	y prend la valeur $f(x)$
L6	Fin Tant que	Fin Tant que
L7	❑ Afficher « α appartient à l'intervalle $[x ; x+10^{-6}]$ »	❑ Afficher « α appartient à l'intervalle $[x-10^{-6} ; x]$

CORRIGÉ du DS 4

Règle de base : Quand on calcule des limites, on ne change l'écriture de la fonction que s'il y a une forme indéterminée. Sinon, on écrit « : par somme, par produit ...etc » et on donne la valeur de la limite. Point.

Exercice 1.

1) <u>ROC</u> : Prouver que $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$. Voir cours.

2) Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

a) Déterminer toutes les asymptotes horizontales de $\mathscr{C}_f$ s'il en existe.

<u>Méthode</u> : Pour savoir si $\mathscr{C}$ admet une/des asymptote(s) horizontale(s), on calcule les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

• *Limite en* $+\infty$ [Forme Indéterminée, on modifie l'écriture de f]: On a $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{3x}=\dfrac{e^{2x}}{3x}-\dfrac{1}{3x}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{e^{2x}}{2x}-\dfrac{1}{3x}$

$$\left.\begin{array}{l}\circ\ \lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{2x}\overset{(i)}{=}\lim_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X}\overset{(ii)}{=}+\infty\\ \circ\ \lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3x}=0\end{array}\right\}\text{ donc, par somme et produit, }\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2}{3}\times\dfrac{e^{2x}}{2x}-\dfrac{1}{3x}=+\infty.$$

(i) avec $X=2x$ *(ii) limite du cours*

→ La limite de f en $+\infty$ est infinie donc $\mathscr{C}$ n'admet <u>pas d' asymptote horizontale en</u> $+\infty$.

• *Limite en* $-\infty$ [PAS une Forme Indéterminée, on ne modifie pas l'écriture de f]: On a $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$

$$\left.\begin{array}{l}\circ\ \lim_{x\to-\infty}e^{2x}-1=\lim_{X\to-\infty}e^X-1=0-1\\ \circ\ \lim_{x\to-\infty}3x=-\infty\end{array}\right\}\text{ donc, par quotient, }\lim_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}=0.$$

→ $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ donc la droite d'équation $y=0$ est une <u>asymptote horizontale</u> pour $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

b) Déterminer toutes les asymptotes verticales de $\mathscr{C}_f$ s'il en existe.

Il ne peut y avoir d'asymptote verticales que pour les valeurs pour lesquelles f n'est pas continue, notamment les valeurs interdites. On cherche donc la limite en 0.[Forme Indéterminée, on modifie l'écriture de f]

• *Limite en 0* : On a $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{3x}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\right)$ d'où $\lim_{x\to0}\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\right)=\lim_{X\to0}\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{e^X-1}{X}\right)\overset{ROC}{=}\dfrac{2}{3}\times1=\dfrac{2}{3}$.

→ La limite de f en 0 n'est PAS infinie (ni par valeurs supérieures ni par valeurs inférieures) donc $\mathscr{C}$ n'admet pas d' asymptote verticale en 0.

<u>Remarque</u> : Ici, on voit que la limite de f en 0 existe donc les limites en 0 par valeurs supérieures ni par valeurs inférieures seront égales à cette valeur ; on ne sépare donc pas les cas.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie par $f(x)=x\,e^{\frac{1}{x}}$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Variations.

a) Dérivée : f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}-\{0\}$, d'où pour tout réel x non nul, $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}+x\,e^{\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$. $\boxed{\forall x\neq0,\ f'(x)=\dfrac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}}$

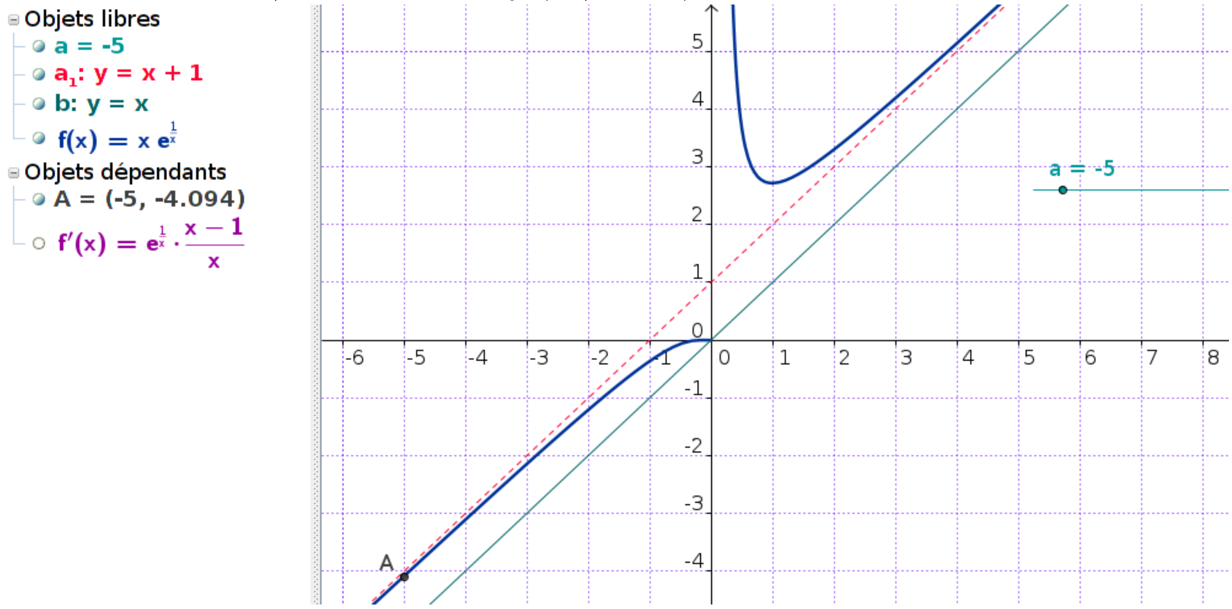
b) En déduire les variation de f . Dresser son tableau de variations.

$\forall x\neq0,\ e^{\frac{1}{x}}>0$ Donc $f'(x)$ est de signe de $\dfrac{x-1}{x}$, lui-même du signe de $(x-1)x$ car la règle des signes est la même pour un produit et un quotient. $x\mapsto(x-1)x$ est un polynôme du second degré, il est donc du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur de ses racines qui sont 0 et 1.

<u>Autre méthode</u> : Faire un tableau de signe pour trouver le signe du quotient $\dfrac{x-1}{x}$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0 ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

Point-méthode : On vérifie que c'est cohérent avec le graphique donné par la calculatrice :



2) Limites.

a) Déterminer si elles existent les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

• *Limite en* $+\infty$ [Ce n'est PAS une Forme Indéterminée, on ne modifie pas l'écriture de f]:

$$\left.\begin{array}{l} \circ \ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} \overset{(i)}{=} \lim\limits_{X\to 0} e^{X} = 1 \\ \circ \ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \text{donc, par produit, } \lim_{x\to+\infty} x\,e^{\frac{1}{x}} = +\infty. \qquad \textit{(i) en posant } X = \frac{1}{x}$$

Point-méthode : On vérifie que c'est cohérent avec le graphique donné par la calculatrice :

• *Limite en* $-\infty$ [Ce n'est PAS une Forme Indéterminée, on ne modifie pas l'écriture de f]:

$$\left.\begin{array}{l} \circ \ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} \overset{(i)}{=} \lim\limits_{X\to 0} e^{X} = 1 \\ \circ \ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \end{array}\right\} \text{donc, par produit, } \lim_{x\to-\infty} x\,e^{\frac{1}{x}} = -\infty. \qquad \textit{(i) en posant } X = \frac{1}{x}$$

Point-méthode : On vérifie que c'est cohérent avec le graphique donné par la calculatrice :

b) Déterminer si elle existe la limite de la fonction f en 0 par valeurs supérieures.

$$\left.\begin{array}{l} \circ \ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{1}{x}} \overset{(i)}{=} \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty \\ \circ \ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0 \end{array}\right\} \text{donc } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\,e^{\frac{1}{x}} \text{ est une forme indéterminée du type } \infty\times 0.$$

[C'est une Forme Indéterminée, on modifie l'écriture de f]

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\,e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{(i)}{=} \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^{X}}{X} \overset{(ii)}{=} +\infty$

(i) en posant $X = \frac{1}{x}$

(ii) limite du cours : Théorème de croissance comparée.

c) Déterminer si elle existe la limite de la fonction f en 0 par valeurs inférieures.

[Ce n'est PAS une Forme Indéterminée, on ne modifie pas l'écriture de f]

$\left.\begin{array}{l} \circ \ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \overset{(i)}{=} \lim\limits_{X\to -\infty} \mathrm{e}^{X} = 0 \\ \circ \ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x = 0 \end{array}\right\}$ donc, par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$. *(i) en posant* $X=\frac{1}{x}$

d) f n'ayant de limite finie ni en $+\infty$ ni en $-\infty$, $\mathscr{C}_f$ n'a pas d'asymptote horizontale.

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ Donc la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale de $\mathscr{C}_f$.

3) Résolution de l'équation $f(x)=-4$

a) Prouver que l'équation $f(x)=-4$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et en donner un encadrement à 0,1 près. On notera α cette solution.

■ Recherche de solution(s) dans $]-\infty;0[$:

- f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;0]$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=0>-4$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty<-4$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=-4$ admet une unique solution dans $]-\infty;0[$ que l'on notera par la suite α.

■ Recherche de solution(s) dans $]0;+\infty]$: D'après le tableau de variations, pour tout $x>0$, $f(x)\geqslant \mathrm{e}>-4$ donc l'équation $f(x)=-4$ n'a aucune solution dans $]0;+\infty]$.

→ Finalement, l'équation $f(x)=-4$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

On cherche ensuite une valeur approchée de α en faisant un tableau de valeurs à la calculatrice : $-5<\alpha<-4,9$

b)

L1	☑	x prend la valeur -1	❑	x prend la valeur 0
L2		y prend la valeur $f(x)$		y prend la valeur $f(x)$
L3	❑	Tant que $y<-4$	☑	Tant que $y>-4$
L4	❑	x prend la valeur $x+10^{-6}$	☑	x prend la valeur $x-10^{-6}$
L5		y prend la valeur $f(x)$		y prend la valeur $f(x)$
L6		Fin Tant que		Fin Tant que
L7	☑	Afficher « α appartient à l'intervalle $[x\,;x+10^{-6}]$ »	❑	Afficher « α appartient à l'intervalle $[x-10^{-6};x]$

DS4 TS1

Exercice	1		**7**
	1	1,5	
	2	5,5	
Exercice 2a			**13**
1	*a*	1,5	
	b	1,5	
2	*a*	2	**6**
	b	1,5	
	c	1	
	d	0,5	
	e	1	
3	*a*	2	
	b	2	
			# 20