D.S. n°4 : Suites, Probabilités, Complexes , exponentielle — TS1

Samedi 15 décembre 2012, 3h, **Calculatrices autorisées**. Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : – ± + Technique : – ± + Raisonnement : – ± +	Note : $\frac{}{40} = \frac{}{20}$

/19,5

Exercice 1.

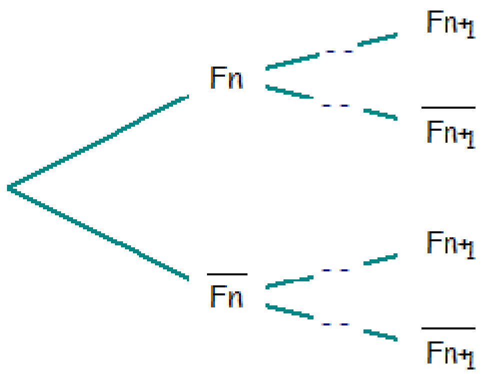
Timothé[1] a décide d'arrêter de fumer, et aujourd'hui, il y est parvenu ! Mais pour la suite on admet que :

- S'il ne fume pas un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,7 ;
- S'il fume un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,4.

On se demande comment le comportement de Timothée va évoluer et quelles sont ses chances de réussite.

Aujourd'hui est le jour 0 et on désigne pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'événement « *Timothé fume le jour* n » par F_n. On note p_n la probabilité que Timothé ne fume <u>pas</u> le jour n .

1) Compléter l'arbre de probabilité ci-contre.



2) a) Donner la valeur de p_1.

b) Démontrer que pour tout entier $n>0$, on a $p_{n+1}=\frac{3}{10}p_n+\frac{4}{10}$.

3) a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_n = p_n - \frac{4}{7}$. Montrer que la suite (q_n) est géométrique.

b) En déduire pour tout entier $n>0$ q_n puis p_n en fonction de n.

4) Étudiez si les affirmations suivantes sont vraies :

a) La suite (p_n) est croissante.

b) La probabilité p_n est supérieure à 0,5 pour tout entier $n>0$.

c) Pour n suffisamment grand, la probabilité p_n est très voisine de $\frac{4}{7}$.

/16

Exercice 2.

On s'intéresse à l'application qui à un point M du plan complexe d'affixe z associe le point N du plan complexe d'affixe $Z=f(z)$ défini par $Z=f(z)=\frac{z-2+\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}}$.

1) On note $z=x+\mathrm{i}\,y$. Vérifier que $\mathrm{Re}(Z)=\frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$ et exprimer $\mathrm{Im}(Z)$ en fonction de x et y.

2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points M d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul. Préciser sa nature et ses éléments caractéristiques.

3) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des points M d'affixe z tels que Z soit un réel éventuellement nul. Préciser sa nature et ses éléments caractéristiques.

---

[1] *Dans le but de préserver l'anonymat de cet élève de TS1, le nom de famille a été supprimé.*

/17,5

Exercice 3. Vrai-Faux

Les questions sont indépendantes. Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse qui n'est pas justifiée ne sera pas prise en compte. Une justification incomplète sera valorisée.

1) Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2 - z\bar{z} - 1 = 0$ admet au moins une solution.

2) La suite définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ est majorée par 3. (On ne demande pas de trouver une formule explicite pour u_n).

3) L'ensemble des points M d'affixe z telles que $|z - \mathrm{i}| = |z + 2\,\mathrm{i}|$ est une droite parallèle à l'axe des réels.

4) z est solution de l'équation $z^2 - 4z + 5 = 0 \Rightarrow z = 2 + \mathrm{i}$.

/17

Exercice 4.

Les parties II et III sont indépendantes.

Partie I. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x}(2 - x)$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2) Étudier les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations.

Partie II. Position de la courbe par rapport à une tangente

1) Déterminer l'équation de T, la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 2.

2) Au moyen de la calculatrice, faites une conjecture sur les positions relatives de T et $\mathscr{C}$ puis prouvez votre conjecture.

Partie III. Étude d'une suite

1) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, l'équation $f(x) = -\frac{1}{n}$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution. On note cette solution u_n. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

2) a) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - 2 = \dfrac{\mathrm{e}^{-2u_n}}{n}$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est minorée par 2.

3) On considère l'algorithme ci-contre :

```
Saisir n
 x prend la valeur 2
 y prend la valeur 0
 p prend la valeur 0,01
Tant que y > -1/n faire
    x prend la valeur x + p
    y prend la valeur f(x)
FinTant que
Afficher x − p et x.
```

a) Aïman n'aime pas les algorithmes. Il dit qu'il peut obtenir avec sa calculatrice le résultat de l'algorithme sans rien programmer. Comment fait-il et qu'obtient-il par exemple pour $n = 1$? *Votre réponse doit notamment montrer que vous avez compris à quoi sert l'algorithme.*

b) Quel est le rôle de la variable p ?

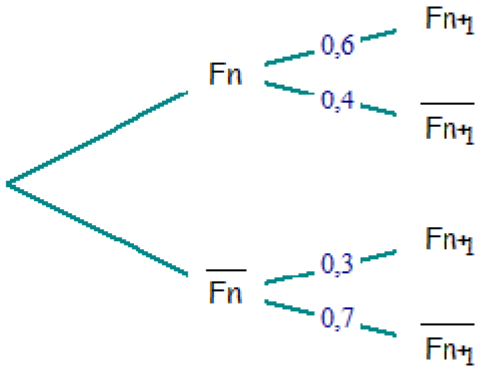
4) a) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

b) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

CORRIGÉ du DS 4

Exercice 1. Un grand classique ! proche du 72 p 351 fait en classe

1) Arbre de probabilités, voir ci-contre.



2) a) $p_1=P_{F_0}(F_1)=0{,}7$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Par la formule des probabilités totales,

$$p_{n+1}=P(\overline{F_{n+1}})=P(\overline{F_{n+1}}\cap\overline{F_n})+P(\overline{F_{n+1}}\cap F_n)$$
$$=P_{\overline{F_n}}(\overline{F_{n+1}})\times P(\overline{F_n})+P_{F_n}(\overline{F_{n+1}})\times P(F_n)$$
$$=\quad 0{,}7\,p_n \quad + 0{,}4(1-p_n)=(0{,}7-0{,}4)\,p_n+0{,}4$$

On a donc démontré que pour tout entier $n>0$, on a $\boxed{p_{n+1}=\frac{3}{10}p_n+\frac{4}{10}}$.

3) a) (q_n) **géométrique** : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $q_{n+1}=p_{n+1}-\frac{4}{7}=\frac{3}{10}p_n+\frac{4}{10}-\frac{4}{7}=\frac{3}{10}p_n-\frac{12}{70}=\frac{3}{10}\left(p_n-\frac{4}{7}\right)=\frac{3}{10}q_n$

d'où $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ q_{n+1}=\frac{3}{10}q_n$ donc la suite (q_n) est géométrique de raison $q=\frac{3}{10}$.

b) En déduire pour tout entier $n>0$ q_n puis p_n en fonction de n.

$q_1=p_1-\frac{4}{7}=\frac{7}{10}-\frac{4}{7}=\frac{9}{70}$ d'où $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ q_n=q_1\times q^{n-1}=\frac{9}{70}\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$ ce qui entraîne

$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ p_n=q_n+\frac{4}{7}=\frac{9}{70}\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}+\frac{4}{7}$ $\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N}^*, q_n=\frac{9}{70}\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} \text{ et } p_n=\frac{4}{7}+\frac{9}{70}\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}}$

4) Étudiez si les affirmations suivantes sont vraies :

a) FAUX : $p_1=0{,}7$ et $p_2\approx 0{,}61$ donc la suite (p_n) n'est <u>PAS croissante.</u>

b) VRAI. $\forall\, n\in\mathbb{N}^*, \frac{9}{70}\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}>0$ donc $p_n=\frac{4}{7}+\frac{9}{70}\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}>\frac{4}{7}\approx 0{,}57>0{,}5$

<u>La probabilité p_n est supérieure à 0,5 pour tout entier $n>0$.</u>

c) VRAI : $-1<\frac{3}{10}<1$ donc par le théorème sur les limites de suites géométriques, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}=0$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{7}+\frac{9}{70}\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}=\frac{4}{7}$.

Autrement dit, <u>pour n suffisamment grand, la probabilité p_n est très voisine de $\frac{4}{7}$</u>.

Exercice 2. proche d'exercices faits en classe (voir feuille d'exercices)

On s'intéresse à l'application qui à un point M du plan complexe d'affixe z associe le point N du plan complexe d'affixe $Z=f(z)$ défini par $Z=f(z)=\frac{z-2+i}{z+2i}$.

1)

$$Z=f(z)=\frac{x+iy-2+i}{x+iy+2i}=\frac{[(x-2)+i(y+1)]}{x+i(y+2)}\times\frac{[x-i(y+2)]}{x-i(y+2)}$$
$$=\frac{[x(x-2)+(y+1)(y+2)]+i[-(x-2)(y+2)+x(y+1)]}{x^2+(y+2)^2}=\frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}+i\frac{-xy+xy-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$$

d'où $\boxed{\mathrm{Re}(Z)=\frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2} \text{ et } \mathrm{Im}(Z)=\frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}}$

2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points M d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul. *Réponse :* $M\in\mathcal{E}_1\Leftrightarrow Z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\mathrm{Re}(Z)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x+3y+2=0\\ x^2+(y+2)^2\neq 0\end{cases}$

Soit A le point d'affixe $z_A=0-2i$ $\quad x^2+(y+2)^2\neq 0\Leftrightarrow M\neq A$

$x^2+y^2-2x+3y+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$. Soit C le cercle de centre $\Omega\left(1;-\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Le point A appartient à ce cercle.

On peut reformuler les conditions précédentes de manière géométrique : $M \in \mathcal{E}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} M \in C \\ M \neq A \end{cases}$

$\mathcal{E}_1$ est donc le cercle de centre $\Omega\left(1;-\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé de $A(0;-2)$.

3) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des points M d'affixe z tels que Z soit un réel éventuellement nul.

$M \in \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(Z)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y+4=0 \\ x^2+(y+2)^2 \neq 0 \end{cases}$

$-x+2y+4=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-2$. Soit (d) la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x-2$. Le point A (le même qu'à la question précédente) appartient à ce cercle.

On peut reformuler les conditions précédentes de manière géométrique : $M \in \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (d) \\ M \neq A \end{cases}$

$\mathcal{E}_2$ est donc la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x-2$ privée de $A(0;-2)$.

Exercice 3. Vrai-Faux

1) Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2-z\bar{z}-1=0$ admet au moins une solution. <u>FAUX</u>

Avec $z=x+\mathrm{i}y$, $z^2-z\bar{z}-1=0 \Leftrightarrow (x+iy)^2-(x^2+y^2)-1=0 \Leftrightarrow (x^2-y^2-x^2-y^2-1)+2ixy=0$

$\Leftrightarrow (-2y^2-1)+2ixy=0 \Leftrightarrow -2y^2-1$ et $2xy=0$. Or, y étant réel l'équation $2y^2=-1$ n'a pas de solution car le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul. L'équation n'admet donc pas de solution.

2) La suite définie par $u_0=1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$ est majorée par 3. <u>VRAI</u>

Prouvons-le par récurrence: Soit P_n la propriété « $u_n \leqslant 3$ »

<u>Initialisation</u> : $u_0=1 \leq 3$ donc P_0 est vraie.

<u>Hérédité</u> : Supposons P_n vraie pour un certain rang n.

$u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2 \geq \frac{1}{3}\times 3+2=3$ donc P_{n+1} est vraie. On a donc prouvé par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 3$.

3) L'ensemble des points M d'affixe z telles que $|z-\mathrm{i}|=|z+2\mathrm{i}|$ est une droite parallèle à l'axe des réels. <u>VRAI</u> Soient A et B les points d'affixes respectives i et $-2\mathrm{i}$.

$|z-\mathrm{i}|=|z+2\mathrm{i}| \Leftrightarrow |z-z_A|=|z-z_B| \Leftrightarrow AM=BM \Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [AB]. Comme A et B sont sur l'axe des ordonnées leur médiatrice est parallèles à l'axe des abscisses qui est l'axe des réels.

4) z est solution de l'équation $z^2-4z+5=0 \Rightarrow z=2+\mathrm{i}$. <u>FAUX</u>

Par l'absurde : si l'implication était vraie, cela voudrait dire que l'équation $z^2-4z+5=0$ n'a qu'une solution qui est $z_0=2+\mathrm{i}$. On c'est une équation à coefficient réel donc si z_0 est solution, $\overline{z_0}=2-\mathrm{i}$ aussi, ce qui contredit l'unicité de la solution.

Exercice 4. Partie III proche du 76 p 145 (en plus facile) fait en classe

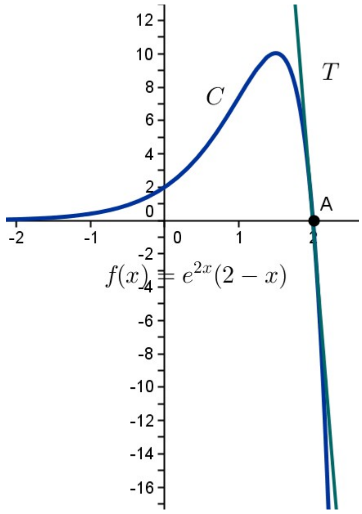
<u>Partie I</u>. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{2x}(2-x)$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.

- $f(x)=\mathrm{e}^{2x}(2-x)=2\mathrm{e}^{2x}-x\mathrm{e}^{2x}=2\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}\times 2x\mathrm{e}^{2x}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x\mathrm{e}^{2x}=\lim\limits_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^X=0$ d'après un théorème de croissance comparée. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x}=\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X=0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}\times 2x\mathrm{e}^{2x}=0-\frac{1}{2}\times 0=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x}=\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-x=-\infty$ donc par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x}(2-x)=-\infty$.

Finalement, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$ $f(x)=\mathrm{e}^{2x}(2-x)$



2) Étudier les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables et $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}(2-x)+\mathrm{e}^{2x}(-1)=\mathrm{e}^{2x}(4-2x-1)=\mathrm{e}^{2x}(3-2x)$

La fonction exponentielle ne prend que des valeurs positives donc $f'(x)$ est du signe de $3-2x$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\mathrm{e}^3}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

<u>Partie II</u>. Position de la courbe par rapport à une tangente

1) Déterminer l'équation de T, la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 2.

$f'(x)=\mathrm{e}^{2x}(3-2x)$ donc $f'(2)=\mathrm{e}^4(-1)=-\mathrm{e}^4$. De plus $f(2)=0$. T a pour équation $y=f'(2)(x-2)+f(2)$. $\boxed{\text{T a pour équation } y=-e^4(x-2)}$.

2) Au moyen de la calculatrice, faites une conjecture sur les positions relatives de T et $\mathscr{C}$ puis prouvez votre conjecture.

<u>Conjecture</u> : $\mathscr{C}$ est toujours en dessous de T.

<u>Preuve</u> : Il suffit de prouver que pour tout réel x, $f(x)\leqslant-\mathrm{e}^4(x-2)$.

$f(x)\leqslant-\mathrm{e}^4(x-2)\Leftrightarrow f(x)+\mathrm{e}^4(x-2)\leqslant0\Leftrightarrow e^{2x}(2-x)+\mathrm{e}^4(x-2)\leqslant0\Leftrightarrow(e^{2x}-e^4)(2-x)\leqslant0$.

On étudie le signe de chaque facteur pour compléter le tableau de signe : $e^{2x}-e^4\geqslant0\Leftrightarrow e^{2x}\geqslant e^4\Leftrightarrow 2x\geqslant4\Leftrightarrow x\geqslant2$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^4$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y_T=(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^4)(2-x)$		$-$	0	$-$	

Le tableau de signe prouve que pour tout réel x, $(e^{2x}-e^4)(2-x)\leqslant0$ càd que pour tout réel x, $f(x)\leqslant-\mathrm{e}^4(x-2)$, ce qui prouve que <u>$\mathscr{C}$ est toujours en dessous de T</u>.

<u>Partie III</u>. Étude d'une suite *(Dans l'exercice 76 p 145 c'était n au lieu de -1/n)*

1) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, l'équation $f(x)=-\frac{1}{n}$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution. On note cette solution u_n. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\geqslant1}$.

L'idée

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		u_n		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0			$-$			
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\mathrm{e}^3}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{n}$	$\searrow$	$-\infty$

La rédaction

- Le tableau de variations de f indique que $\forall\, x\in\left]-\infty,\frac{3}{2}\right], f(x)\geq0$, donc l'équation $f(x)=-\frac{1}{n}$ n'a pas de solution dans cet intervalle.
- f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

Comme $-\frac{1}{n}$ appartient à $\left]-\infty,\frac{e^3}{2}\right]$, l'intervalle image de $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ par f, par le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=-\frac{1}{n}$ admet une unique solution dans cet intervalle.

On a donc prouvé que que pour tout entier naturel n non nul, l'équation $f(x)=-\frac{1}{n}$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution.

2) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. u_n est solution de l'équation $f(x)=-\frac{1}{n}$ donc $f(u_n)=-\frac{1}{n}$ càd $e^{2u_n}(2-u_n)=-\frac{1}{n}$

Or $e^{2u_n}(2-u_n)=-\frac{1}{n}\Leftrightarrow(2-u_n)=-\frac{e^{-2u_n}}{n}\Leftrightarrow(u_n-2)=\frac{e^{-2u_n}}{n}$. On a prouvé que $\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ u_n-2=\frac{\mathrm{e}^{-2u_n}}{n}}$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction exponentielle ne prend que des valeurs positives et $n\geqslant 0$ donc $u_n-2=\frac{\mathrm{e}^{-2u_n}}{n}\geq 0$ càd $u_n\geq 2$. $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ u_n\geq 2$. Autrement dit, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est <u>minorée par</u> 2.

3) Algorithme: *(similaire à celui de l'exercice 94 p 78 fait en classe)*

```
Saisir n
 x prend la valeur 2
 y prend la valeur 0
 p prend la valeur 0,01
Tant que y > -1/n faire
    | x prend la valeur x+p
    | y prend la valeur f(x)
FinTant que
Afficher x-p et x.
```

a) L'algorithme donne un encadrement de u_n : Les valeurs $x-p$ et x affichées sont telles que $x-p\leqslant u_n\leqslant x$. On peut obtenir un tel encadrement en faisant un tableau de valeurs à la calculatrice.

f est strictement décroissante sur $[2,+\infty[$, $f(2{,}01)=-0{,}56$ et $f(2{,}02)=-1{,}14$ donc u_1, solution de $f(x)=-1$ vérifie $\boxed{2{,}01\leqslant u_1\leqslant 2{,}02}$.

b) La variable p permet de choisir la précision de l'encadrement, on obtient en effet <u>un encadrement à p près</u>.

4) a)

L'idée

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	2	u_{n+1}	u_n	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0		$-$		
$f(x)$	$0 \nearrow$	$\frac{e^3}{2}$	$\searrow 0$	$-\frac{1}{n+1}$	$-\frac{1}{n}$	$\searrow -\infty$

La rédaction

On prouve par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

Supposons que (u_n) ne soit pas décroissante, cela veut dire qu'il existe n_0 tel que $u_{n_0}>u_{n_0+1}$.

$$u_{n_0}>u_{n_0+1}\overset{(i)}{\Rightarrow} f(u_{n_0})<f(u_{n_0+1})\Leftrightarrow-\frac{1}{n_0}>-\frac{1}{n_0+1}\overset{(ii)}{\Leftrightarrow}\frac{1}{n_0}<\frac{1}{n_0+1}\overset{(iii)}{\Leftrightarrow}n_0>n_0+1\Leftrightarrow 0>1$$

(i) car $u_{n_0}, u_{n_0+1}\in[2\,;+\infty[$, intervalle sur lequel f est décroissante ;

(ii) en multipliant par -1 ; Les inégalités sont retournées car $-1<0$;

(iii) car $u_{n_0}, u_{n_0+1}\in]0\,;+\infty[$, intervalle sur lequel la fonction inverse est décroissante.

On aboutit à une contradiction, donc <u>la suite</u> $(u_n)_{n\geqslant 1}$ <u>est décroissante</u>.

b) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

(u_n) est décroissante d'après (4a) et minorée d'après (2b) donc convergente. Soit ℓ sa limite. On a vu au (2a) que $u_n-2=\frac{\mathrm{e}^{-2u_n}}{n}$ càd $u_n=2+\mathrm{e}^{-2u_n}\times\frac{1}{n}$. En passant à la limite dans cette expression, étant donné que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2+e^{-2\ell}\times 0=2$. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2}$

Barème : **DS04 2012-13**

Exercice	1	*Points*	**9,5**	
	1	1		
	2a	0,5		
	2b	2		
	3a	1,5		
	3b	1,5		
	4a	1		
	4b	1		
	4c	1		
	3			
Exercice	2		**6**	
	1	2,5		
	2	2		
	3	1,5		
Exercice	3		**7,5**	
	1	2		
	2	2		
	3			
	4	2		
	5	1,5		
Exercice	4		**17**	
	1	2		limites
	2	2		var
II	*1*	1,5		Eq Tan
	2	2		Pos Rel
III	*1*	1,5		sol unique
	2a	1,5		
	2b	1		
	3a	1,5		aiman
	3b	0,5		p
	4a	1,5		
	4b	2		
			40	