SUJET G

D.S. n°5 : Limites & Vecteurs de l'espace	TS1

Vendredi 25 janvier 2013, 2h, **Calculatrices autorisées**. Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : – ± + Technique : – ± + Raisonnement : – ± +	Note : $\overline{}$ **20**

TOUS les élèves doivent traiter l'exercice 1 puis soit l'exercice 2, soit l'exercice 2 bis, mais pas les deux. L'exercice 2 est un cas particulier de l'exercice 2 bis, qui traite le cas général. Si vous choisissez de traiter l'exercice 2, vous serez noté(e) sur 20. Il y a évidemment un bonus pour traiter le cas général et si vous choisissez de traiter l'exercice 2 bis, vous serez noté(e) sur 22. Si un(e) élève obtient une note supérieure à 20 à ce DS, les points excédentaires seront reportés sur le DS précédent.

/10 **Exercice 1.**

Partie I. R.O.C.

On considérera acquis le résultat suivant : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > x$.

Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. *On pourra utiliser la fonction* $g : x \mapsto e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

/1,5 En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-x} = 0$.

Partie II. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3} + \dfrac{e^{-2x}}{1+3x}$, soit $\mathscr{D}_f$ son domaine de définition et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

/1,5 **1)** Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

/1 **2)** Montrer que la dérivée de f est du signe de $-6x-5$ sur $\mathscr{D}_f$.

/2 **3)** Dresser le tableau de variations complet de f, c'est à dire comportant en plus des variations toutes les valeurs et limites nécessaires.

4) Étude des asymptotes de $\mathscr{C}$.

/1 **a)** Indiquer toutes les asymptotes de $\mathscr{C}$.

/1 **b)** Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote horizontale.

5) Étude d'une aire.

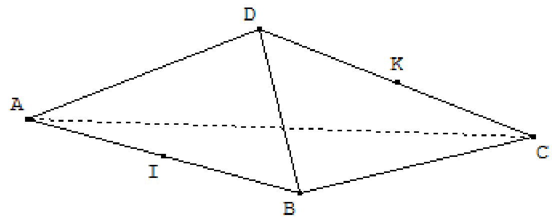
Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=4$ et $x=6$.

/1 **a)** Donner un encadrement de $f(x)$ sur $[4;6]$.

/1 **b)** En déduire que $2\sqrt{3} \le \mathscr{A} \le 2\sqrt{3} + 10^{-4}$.

/10 **Exercice 2.** Cas particulier

ABCD est un tétraèdre. I et K sont les milieux respectifs de [AB] et [CD]. J et L sont les points définis par $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.



Le but des questions 1 à 5 est de montrer que les droites (IL), (JK) et (BD) sont concourantes en un point R et de préciser la position de R sur (BD). La question 6 propose de démontrer un résultat similaire par des méthodes purement géométriques (sans utiliser les coordonnées).

/0,5 **1)** Expliquer pourquoi $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ constitue un repère de l'espace.

/1 **2)** Donner dans ce repère les cordonnées de tous les points de l'énoncé.

/1,5 **3)** Prouver que les points I, J, K et L sont coplanaires.

/1,5 **4) a)** Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (JK) et (IL).

/2 **b)** En déduire que les droites (IL) et (JK) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection. On appellera ce point R.

/1,5 **5)** Montrer que le point R appartient à la droite (BD) et préciser sa position sur (BD) en indiquant la valeur du réel λ pour laquelle on a $\overrightarrow{BR}=\lambda\,\overrightarrow{BD}$.

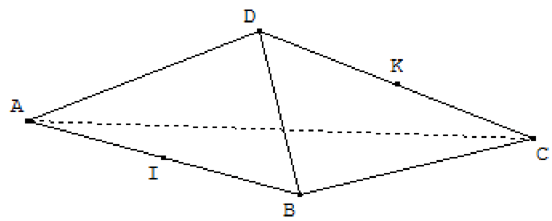
/2 **6)** Sans faire aucun calcul, prouver que les droites (KL), (IJ) et (AC) sont concourantes.
Indication : Quelle est l'intersection des plans (ABC) et (ACD) ?
Dans cette question, toute trace d'initiative même infructueuse sera valorisée.

/12 **Exercice 2 bis.** Cas général

ABCD est un tétraèdre. I et K sont les milieux respectifs de [AB] et [CD].

Soit a un réel tel que $a\in[0;1]$ avec $a\neq\frac{1}{2}$.

J et L sont les points définis par $\overrightarrow{AL}=a\,\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BJ}=a\,\overrightarrow{BC}$.



Le but des questions 1 à 5 est de montrer que les droites (IL), (JK) et (BD) sont concourantes en un point R et de préciser la position de R sur (BD). La question 6 propose de démontrer un résultat similaire par des méthodes purement géométriques (sans utiliser les coordonnées).

/0,5 **1)** Expliquer pourquoi $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ constitue un repère du plan.

/1,5 **2)** Donner dans ce repère les cordonnées de tous les points de l'énoncé.

/2 **3)** Prouver que les points I, J, K et L sont coplanaires.

/2 **4) a)** Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (JK) et (IL).

/2,5 **b)** En déduire que les droites (IL) et (JK) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection. On appellera ce point R.

/1,5 **5)** Montrer que le point R appartient à la droite (BD) et préciser sa position sur (BD) en indiquant la valeur du réel λ pour laquelle on a $\overrightarrow{BR}=\lambda\,\overrightarrow{BD}$.

/2 **6)** Sans faire aucun calcul, prouver que les droites (KL), (IJ) et (AC) sont concourantes.
Indication : Quelle est l'intersection des plans (ABC) et (ACD) ?
Dans cette question, toute trace d'initiative même infructueuse sera valorisée.

CORRIGÉ du DS 5

Exercice 1.

Partie I. **R.O.C.** *On considérera acquis le résultat suivant :* $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x > x$.

• Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$. Voir la démonstration du cours qui utilise la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}$.

Autre démonstration possible : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x > x$ donc $\forall x > 0,\ \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > \frac{x}{2}$. En appliquant la fonction $x \mapsto x^2$ qui est croissante sur $[0;+\infty[$ on obtient $\forall x > 0,\ \mathrm{e}^x = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 > \frac{x^2}{4}$ d'où $\forall x > 0,\ \frac{\mathrm{e}^x}{x} > \frac{x}{4}$ (en divisant par x qui est positif). Par le théorème de minoration, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{4} = +\infty$ on a bien $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0$, càd $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0}$

Partie II. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3} + \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+3x}$, soit $\mathscr{D}_f$ son domaine de définition et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

• *Limite en* $+\infty$: On a $f(x) = \sqrt{3} + \mathrm{e}^{-2x} \times \frac{1}{1+3x}$

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0 \\ \circ\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+3x} = 0 \end{array}\right\} \text{donc, par somme et produit, } \lim_{x\to+\infty} \sqrt{3} + \mathrm{e}^{-2x} \times \frac{1}{1+3x} = \sqrt{3} + 0 \times 0 = \sqrt{3}.$$

• *Limite en* $-\infty$: On a $f(x) = \sqrt{3} + \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2x} \times \frac{-2x}{1+3x}$

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty \\ \circ\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x}{1+3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{\frac{1}{x}+3} = -\frac{2}{3} \end{array}\right\} \text{donc, par produit, } \lim_{x\to+\infty} \sqrt{3} + \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2x} \times \frac{-2x}{1+3x} = -\infty.$$

2) Montrer que la dérivée de f est du signe de $-6x-5$ sur $\mathscr{D}_f$.

$f(x) = \sqrt{3} + \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+3x}$ $\quad f'(x) = 0 + \frac{-2\mathrm{e}^{-2x}(1+3x) - 3\mathrm{e}^{-2x}}{(1+3x)^2} = \frac{\mathrm{e}^{-2x}(-2-6x-3)}{(1+3x)^2} = \frac{\mathrm{e}^{-2x}(-6x-5)}{(1+3x)^2}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-2x} > 0$ et $(1+3x)^2 \geq 0$, $f'(x)$ est du signe de $-6x-5$ sur $\mathscr{D}_f$.

3) Dresser le tableau de variations complet de f, c'est à dire comportant en plus des variations toutes les valeurs et limites nécessaires.

• *Limite en -1/3 par valeurs supérieures* : On a $f(x) = \sqrt{3} + \mathrm{e}^{-2x} \times \frac{1}{1+3x}$

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ \lim\limits_{x\to-1/3} \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{2/3} \\ \circ\ \lim\limits_{\substack{x\to-1/3 \\ x>-1/3}} \frac{1}{1+3x} = \lim\limits_{\substack{X\to0 \\ X>0}} \frac{1}{X} = +\infty \end{array}\right\} \text{donc, par produit, } \lim_{\substack{x\to-1/3 \\ x>-1/3}} \sqrt{3} + \mathrm{e}^{-2x} \times \frac{1}{1+3x} = +\infty.$$

• *Limite en -1/3 par valeurs inférieures* : On a $f(x)=\sqrt{3}+\mathrm{e}^{-2x}\times\dfrac{1}{1+3x}$

$$\left.\begin{array}{l} \circ \ \lim\limits_{x\to-1/3} \mathrm{e}^{-2x}=\mathrm{e}^{2/3} \\ \circ \ \lim\limits_{\substack{x\to-1/3\\ x<-1/3}} \dfrac{1}{1+3x}=\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ X<0}} \dfrac{1}{X}=-\infty \end{array}\right\} \text{ donc, par produit, } \lim\limits_{\substack{x\to-1/3\\ x<-1/3}} \sqrt{3}+\mathrm{e}^{-2x}\times\dfrac{1}{1+3x}=-\infty .$$

Tableau de variations complet de f :

x	$-\infty$		$-5/6$		$-1/3$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		f(−5/6)	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\sqrt{3}$

$$f\left(-\frac{5}{6}\right)=\sqrt{3}-\frac{2e^{5/3}}{3}\approx-1{,}8$$

4) Étude des asymptotes de $\mathscr{C}$.

a) Indiquer toutes les asymptotes de $\mathscr{C}$.

- $\lim\limits_{\substack{x\to-1/3\\ x>-1/3}} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x=-\dfrac{1}{3}$ est une <u>asymptote verticale</u> pour $\mathscr{C}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt{3}$ donc la droite d'équation $y=\sqrt{3}$ est une <u>asymptote horizontale</u> pour $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b) Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote horizontale.

$\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite d'équation $y=\sqrt{3}$ pour les réels x tels $f(x)\geqslant\sqrt{3}$.

$$f(x)\geq\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}+\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+3x}\geq\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+3x}\geq 0\overset{(i)}{\Leftrightarrow}1+3x>0\Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}.$$

(i) par la règle des signes, car e^{-2x} *est toujours positif.*

Finalement, $\mathscr{C}$ est au-dessus de son asymptote horizontale si $x>-\dfrac{1}{3}$ et en dessous sinon.

5) Étude d'une aire.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=4$ et $x=6$.

a) Donner un encadrement de $f(x)$ sur $[4;6]$.

$4\leqslant x\leqslant 6\Rightarrow f(6)\leq f(x)\leq f(4)$ car f est décroissante sur $[4;6]$ d'après son tableau de variations.

$\boxed{\forall x\in[4;6],\ f(6)\leq f(x)\leq f(4)}$

b) En déduire que $2\sqrt{3}\leq\mathscr{A}\leq 2\sqrt{3}+10^{-4}$.

$\forall x\in[4;6],\ f(6)\leq f(x)\leq f(4)$ donc $\int_4^6 f(6)\,\mathrm{d}x\leq\int_4^6 f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_4^6 f(4)\,\mathrm{d}x$ càd $2f(6)\leq\int_4^6 f(x)\,\mathrm{d}x\leq 2f(4)$.

Or $2f(6)=2\sqrt{3}+\dfrac{2\mathrm{e}^{-12}}{1+18}\geq 2\sqrt{3}$ et $2f(4)=2\sqrt{3}+\dfrac{2\mathrm{e}^{-8}}{1+12}\approx 2\sqrt{3}+5\times10^{-5}\leq 2\sqrt{3}+10^{-4}$.

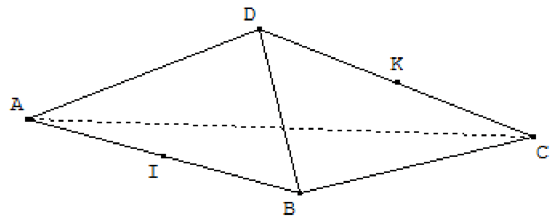
Finalement, $2\sqrt{3}\leq 2f(6)\leq\int_4^6 f(x)\,\mathrm{d}x\leq 2f(4)\leq 2\sqrt{3}+10^{-4}$ d'où $\boxed{2\sqrt{3}\leq\mathscr{A}\leq 2\sqrt{3}+10^{-4}.}$

/12	**Exercice 2 bis.** *Cas général*

ABCD est un tétraèdre. I et K sont les milieux respectifs de [AB] et [CD].

Soit a un réel tel que $a\in[0;1]$ avec $a\neq\frac{1}{2}$.

J et L sont les points définis par $\overrightarrow{AL}=a\,\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BJ}=a\,\overrightarrow{BC}$.



Le but des questions 1 à 5 est de montrer que les droites (IL), (JK) et (BD) sont concourantes en un point R et de préciser la position de R sur (BD). La question 6 propose de démontrer un résultat similaire par des méthodes purement géométriques (sans utiliser les coordonnées).

[*NDLR : Les questions questions 1 à 5 reprennent la partie géométrie analytique de l'exercice de Conakry que je vous avais donné pour vous entraîner et la question 6 reprend la partie géométrie pure de ce même exercice.*]

1) ABCD est un tétraèdre donc les vecteurs $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont non coplanaires. $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ constitue donc un repère de l'espace.

2) Coordonnées des points de l'énoncé :

$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $I\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\end{pmatrix}$ $J\begin{pmatrix}1-a\\a\\0\end{pmatrix}$ $K\begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$ $L\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}$.

Explications : (i) I étant le milieu de [AB], on a $x_I=\frac{x_A+x_B}{2}$ et des formules similaires pour les autres coordonnées. De même pour K.

(ii) Pour J, on fait apparaître la définition des coordonnées : $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{AB}+a\,\overrightarrow{BC}$ car $\overrightarrow{BJ}=a\,\overrightarrow{BC}$ d'où $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+a\,\overrightarrow{BA}+a\,\overrightarrow{AC}=(1-a)\overrightarrow{AB}+a\,\overrightarrow{AC}=(1-a)\overrightarrow{AB}+a\,\overrightarrow{AC}+0\,\overrightarrow{AD}$ et on lit sur cette égalités les coordonnées de J (c'est la définition des coordonnées).

(iii) $\overrightarrow{AL}=a\,\overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AL}=0\,\overrightarrow{AB}+0\,\overrightarrow{AC}+a\,\overrightarrow{AD}$ et on lit sur cette égalités les coordonnées de L.

3) $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1/2-a\\a\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}-1/2\\0\\a\end{pmatrix}$ et on voit que $\begin{pmatrix}1/2-a\\a\\0\end{pmatrix}=2a\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1/2\\0\\a\end{pmatrix}$ càd $\overrightarrow{IJ}=2a\,\overrightarrow{IK}-\overrightarrow{IL}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires donc les points I, J, K et L sont coplanaires.

Si on ne le voit pas, on calcule : Les vecteurs $\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires ssi il existe deux réels x et y tels $\overrightarrow{IJ}=x\,\overrightarrow{IK}+y\,\overrightarrow{IL}$ càd ssi le système $\begin{cases}1/2-a=-1/2\,x-1/2\,y & (E_1)\\ a=1/2\,x & (E_2)\\ 0=1/2\,x+a\,y & (E_3)\end{cases}$ a une solution. (E_2) donne $x=2a$; $(E_3)-(E_2)$ donne $a\,y=-a$ donc $y=-1$ convient. En reportant ces valeurs dans (E_1) on voit que le système est compatible donc le couple $x=2a$ et $y=-1$ est une solution du système donc $\overrightarrow{IJ}=x\,\overrightarrow{IK}+y\,\overrightarrow{IL}$ avec $x=2a$ et $y=-1$ donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires donc les points I, J, K et L sont coplanaires.

4) a) Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (JK) et (IL).

$I\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}-1/2\\0\\a\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\begin{cases}x=1/2-1/2\,t\\ y=0\\ z=0+a\,t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})}$ est une représentation paramétrique de (IL).

$K\begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix}1-a\\a-1/2\\-1/2\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\begin{cases}x=0+(1-a)s\\ y=1/2+(a-1/2)s\\ z=1/2-1/2s\end{cases}\quad (s\in\mathbb{R})}$ est une représentation paramétrique de (JK).

b) En déduire que les droites (IL) et (JK) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection. On appellera ce point R.

Les droites (IL) et (JK) sont sécantes ssi il existe deux réels s et t tels que le système $\begin{cases} 1/2 & -1/2t & = & 0 & +s(1-a) & (E_1) \\ & 0 & = & 1/2 & +s(a-1/2) & (E_2) \\ & at & = & 1/2 & +s(-1/2) & (E_3) \end{cases}$ ait une solution.

(E_2) donne $s=\frac{-1/2}{a-1/2}=\frac{-1}{2a-1}$ (*et voilà à quoi sert l'hypothèse* $a\neq\frac{1}{2}$); En reportant dans (E_3), on a $t=\frac{1/2-1/2s}{a}=\frac{1-s}{2a}=\frac{1-\frac{-1}{2a-1}}{2a}=\frac{2a}{2a(2a-1)}=\frac{1}{2a-1}$. En reportant ces valeurs dans (E_1) on voit que le système est compatible puisque le membre de gauche, qui vaut $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t=\frac{1}{2}(1-t)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2a-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2a-2}{2a-1}\right)=\frac{a-1}{2a-1}$, et le membre de droite, qui vaut $s(1-a)=\frac{-1}{2a-1}(1-a)=\frac{a-1}{2a-1}$ sont égaux. Le couple $s=-\frac{1}{2a-1}$ et $t=\frac{1}{2a-1}$ est une solution du système donc les droites (IL) et (JK) sont sécantes et pour trouver les coordonnées de leur point d'intersection il suffit de remplacer s ou t par sa valeur dans les équations paramétriques des droites. On obtient $\boxed{R\left(\frac{a-1}{2a-1}\,;\,0\,;\,\frac{a}{2a-1}\right)}$.

5) $\overrightarrow{BR}\begin{pmatrix} -\frac{a}{2a-1} \\ 0 \\ \frac{a}{2a-1} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On voit que $\overrightarrow{BR}=\frac{a}{2a-1}\overrightarrow{BD}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BR}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires donc <u>les points B, D et R sont alignés</u>. De plus, la valeur du réel λ pour laquelle on a $\overrightarrow{BR}=\lambda\overrightarrow{BD}$ est $\boxed{\lambda=\frac{a}{2a-1}}$.

6) Sans faire aucun calcul, prouver que les droites (KL), (IJ) et (AC) sont concourantes.

■ Les points I, J, K et L sont coplanaires d'après la question 3 donc les droites (KL) et (IJ) sont coplanaires. *Montrons par l'absurde qu'elles sont sécantes* : <u>Si</u> elles étaient parallèles, par le théorème du toit, elles seraient parallèles à (AC). Par le théorème des milieux dans le triangle ACD, L serait alors le milieu de [AD] et on aurait donc $a=1/2$, ce qui n'est pas le cas d'après l'énoncé. Les droites (KL) et (IJ) sont donc coplanaires et non parallèles, elles sont donc sécantes en un point que l'on appellera Q.

■ L'intersection des plans (ABC) et (ACD) est la droite (AC).

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ Q\in(LK)\subset(ACD) \\ \bullet\ Q\in(IJ)\subset(ABC) \end{array}\right\}\Rightarrow Q\in(ACD)\cap(ABC)=(AC)$. Autrement dit, Q appartient aussi à (AC).

■ Finalement, les droites (KL), (IJ) et (AC) sont concourantes en Q donc concourantes.

Ce qu'en dit Geogebra :