D.S. n°5 : Vecteurs de l'espace	TS1

Jeudi 6 février 2014, 55 min, **Calculatrices autorisées**. Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : + ± − Technique : + ± − Raisonnement : + ± −	Note : $\overline{}$ **20**

/8

Exercice 1. Vrai / Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier. Une réponse non justifiée ne rapporte pas de points.

1) *Affirmation* : $\begin{cases} x=3-t \\ y=1+2t \\ z=-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite *(d)* qui passe par $A(-2;11;-5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

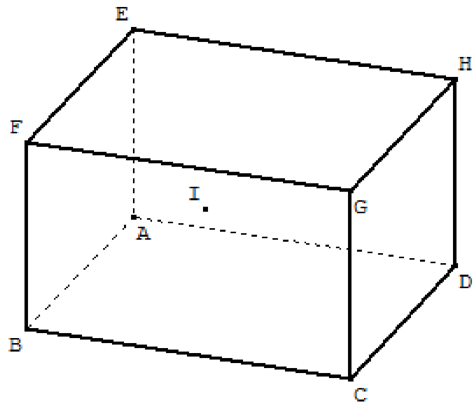
2) Les points A, B et C sont non alignés.
Affirmation : Si $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, alors les points A, B, C, D et E sont coplanaires.

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé. La sphère S de centre A et de rayon 9 est formée de l'ensemble des points situés à 9 unités de A.
Affirmation : Si $A(2\sqrt{3};-4;\sqrt{2})$ et $B(5\sqrt{3};2;-2\sqrt{2})$, alors B appartient à cette sphère

/8

Exercice 2.

ABCDEFGH est un pavé droit. Le point I est défini par $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.



1) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

2) En déduire que

a) $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}=3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AG}$.

b) $\overrightarrow{IE}=-\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{ID}$.

3) a) Qu'en déduit-on pour les points I, B, D et E ?

b) Déterminer la section du pavé par le plan (IBD). *Il est inutile de reproduire la figure, vous pouvez dessiner directement sur l'énoncé.*

/5

Exercice 3.

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par des droites (d_1) et (d_2) de l'espace.

$\begin{cases} x=3+t \\ y=9+3t \\ z=2 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de (d_1) et $\begin{cases} x=0{,}5+2s \\ y=4+s \\ z=4-s \end{cases}$ $(s\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de (d_2).

1) Déterminer les positions relatives de (d_1) et (d_2).

2) *Bonus* : Pourquoi à votre avis les contrôleurs aériens ont-ils choisi des routes présentant ces positions relatives ? *On attend une explication concrète, non mathématique.*

CORRIGÉ du DS 5

Exercice 1.

1) VRAI :

👁 *Une droite admet une infinité de représentations paramétriques. En exhiber une différente de celle proposée ne prouve donc rien.*

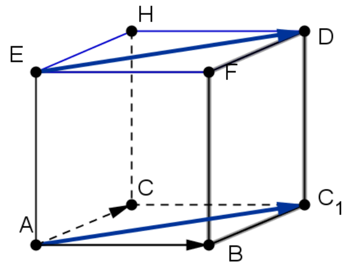
Soit (d) la droite qui passe par $A(-2;11;-5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et soit (d') la droite de représentation paramétrique $\begin{cases}x=3-t\\y=1+2t\\z=-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Montrons qu'il s'agit en fait de la même droite :

• Montrons que les droites (d) et (d') sont parallèles : $\vec{u'}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d'). Comme il est colinéaire à $\vec{u}$ qui est un vecteur directeur de (d) puisque $\vec{u'}=-\vec{u}$, on en déduit que les droites (d) et (d') sont parallèles.

• Montrons que les droites (d) et (d') sont confondues : Il suffit pour cela de montrer qu'elles ont un point commun. On va donc montrer que $A\in(d')$. On remarque que pour $t=5$, $\begin{cases}x=3-5=-2\\y=1+2\times5=11\\z=-5\end{cases}$, qui sont les coordonnées de A, ce qui signifie que $A\in(d')$.

→ Finalement, les droites (d) et (d') sont parallèles avec le point A en commun donc $(d)=(d')$. La représentation paramétrique proposée est donc bien une représentation paramétrique de (d).

2) FAUX : Contre-exemple : Dans le cube ci-contre, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{ED}$ et pourtant les points A, B, C, D et E ne sont PAS coplanaires.

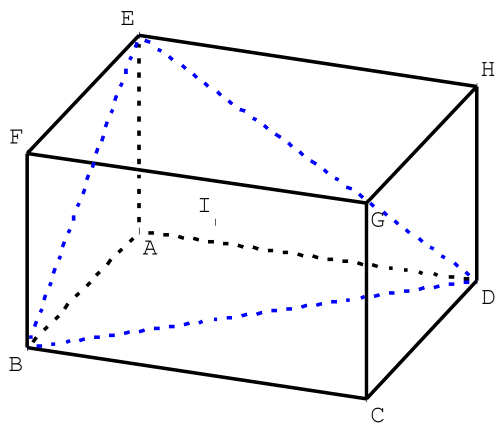


👁 *L'égalité $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, signifie que $\overrightarrow{DE}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ce qui indique seulement que la droite (DE) est parallèle au plan (ABC). Pour que les points A, B, C, D et E soient coplanaires, il faudrait de plus savoir que la droite (DE) et le plan (ABC) ont un point commun, ce qui n'est pas forcément le cas ici.*

3) VRAI car la distance AB vaut 9 unités. En effet, avec $A(2\sqrt{3};-4;\sqrt{2})$ et $B(5\sqrt{3};2;-2\sqrt{2})$, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\sqrt{3}\\6\\-3\sqrt{2}\end{pmatrix}$ d'où $AB=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+6^2+(-3\sqrt{2})^2}=\sqrt{27+36+18}=\sqrt{81}=9$. B appartient à cette sphère.

Exercice 2.

Données : ABCDEFGH est un pavé droit. Le point I est défini par $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.



1) Dans le cube, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CG}$ donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$ par Chasles.
$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}}$.

2) a)

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IE}$$
$$=3\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}=-3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}$$

d'où $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}=3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AG}$

b) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ donc $3\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AG}$ donc $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AG}=\vec{0}$. En reportant dans l'égalité obtenue au 2a) on obtient $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}=\vec{0}$ qu'on réécrit $\overrightarrow{IE}=-\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{ID}$.

3) a) Les points I, B, D et E sont donc coplanaires.

b) D'après 3a), les plans (IBD) et (BED) sont confondus. On obtient la section du pavé par le plan (BED) en joignant B, E et D !

👁 *Chercher la section d'un pavé par un plan, c'est chercher* ***l'intersection du plan avec chacune des faces*** *du pavé. Lorsqu'un plan coupe un cube, cela donne des segments de droites allant d'une arête à une autre sur les faces ou au moins sur certaines d'entre elles.*
Si votre « section » comporte des lignes brisées sur les faces ou des segments qui s'arrêtent au milieu de la face plutôt que d'aller d'une arête à l'autre, c'est faux !
Si vous êtes en train de tracer des traits qui ne sont PAS sur les faces, ils ne peuvent pas faire partie de la section. Par exemple. aucun trait passant par I ne fera partie de la section.

Exercice 3.

1) Déterminer les positions relatives de (d_1) et (d_2).

• Déterminons si les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles : $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ est <u>un</u> vecteur directeur de (d_1) et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est <u>un</u> vecteur directeur de (d_2). Comme ces vecteurs ne sont pas colinéaires, on en déduit que <u>les droites (d_1) et (d_2) ne sont PAS parallèles</u>.

• Déterminons si les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes : On résout pour cela le système $\begin{cases}3 & +t & =0{,}5+2s\\ 9 & +3t & =4 \ +s\\ 2 & & =4 \ -s\end{cases}$ que l'on réécrit $\begin{cases}t & -2s & =-2{,}5 & (L_1)\\ 3t & -s & =-5 & (L_2)\\ & s & =2 & (L_3)\end{cases}$. (L_3) indique que $s=2$ et $(\mathrm{L}_2)+(\mathrm{L}_3): 3t=-3$ càd $t=-1$. Pour savoir si le système est compatible, on reporte ces valeurs dans (L_1) : $t-2s=-1-2\times2=-5\neq-2{,}5$ donc le système n'est pas compatible ce qui prouve que les droites ne sont <u>pas sécantes</u>.

→ Finalement, les droites (d_1) et (d_2) ne sont ni parallèles ni sécantes, elles sont donc <u>non coplanaires</u>.

2) ■ Avoir des trajectoires <u>non sécantes</u> limite les risque de collision.
■ De plus, une des trajectoire sert apparemment à atterrir et décoller alors que l'autre sert à survoler la région :

- la trajectoire matérialisée par la droite (d_1) correspond à des avions qui volent à altitude constante puisqu'on a $z=2$ (qui signifie altitude constante de 2000m ?)
- la trajectoire matérialisée par la droite (d_2) peut correspondre à des avions qui décollent et atterrissent puisqu'on peut avoir $z=0$ lorsque $s=4$.

La route aérienne des avions qui survolent la région <u>ne peut pas être parallèle</u> à la route aérienne des avions qui décollent et atterrissent.

<u>DS5 TS1</u>

Exerc	1		**8**
	1	3	
	2	3	
	2	2	
Exerc	2		**8**
1		1,5	
2	*a*	1,5	
	b	1,5	
3	*a*	1,5	
	b	2	
Exerc	3		**4**
1		4	
2			
		#	**20**