D.S. n°6 : Intégrales	TS1

Jeudi 14 février 2013, 1h30, <u>Calculatrices autorisées</u>. Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : − ± + Technique : − ± + Raisonnement : − ± +	Note : $\overline{}$ **20**

/1,5 **<u>Partie I</u>. R.O.C.**

On considérera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$.

- Si $u\geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$. [Positivité]
- Pour tous réels α et β, $\int_a^b[\alpha u(x)+\beta v(x)]\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$. [Linéarité]

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$ et si pour tout x de $[a,b]$, $f(x)\leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

/5 **<u>Partie II</u>. Étude d'une fonction**

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

/1,5 **1) a)** Déterminer la limite de f en 0 par valeurs supérieures (limite à droite).

/1,5 **b)** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

/1,5 **2)** Déterminer l'expression de la dérivée de f.

/0,5 **3)** Dresser le tableau de variations complet de f sur $]0;+\infty[$.

/14,5 **<u>Partie III</u>. Étude de deux suites**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(S_n)_{n\geqslant 1}$ les suites de terme général respectifs $u_n=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$ et $S_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$.

/2 **4) Étude d'une aire**. Dans le repère orthonormé donné en annexe, on a représenté la courbe représentative de la fonction f. Hachurer l'aire correspondant à u_1 puis en donner une approximation au centième d'unité d'aire près au moyen de la calculatrice.

5) Étude de la suite (u_n).

/1,5 **a)** Donner un encadrement de $f(x)$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right]$. *(Les bornes de l'encadrement ne doivent dépendre que de n.)*

/2 **b)** En déduire que pour tout entier $n\geqslant 1$, $\frac{\mathrm{e}^n}{n(n+1)}\leqslant u_n\leqslant\frac{\mathrm{e}^{n+1}}{n(n+1)}$

/3 **c)** Montrer que $\frac{\mathrm{e}^n}{n(n+1)}=\frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}\right)^2}{\left(\frac{n}{2}\right)^2\left(4+\frac{4}{n}\right)}$ et en déduire la limite de (u_n).

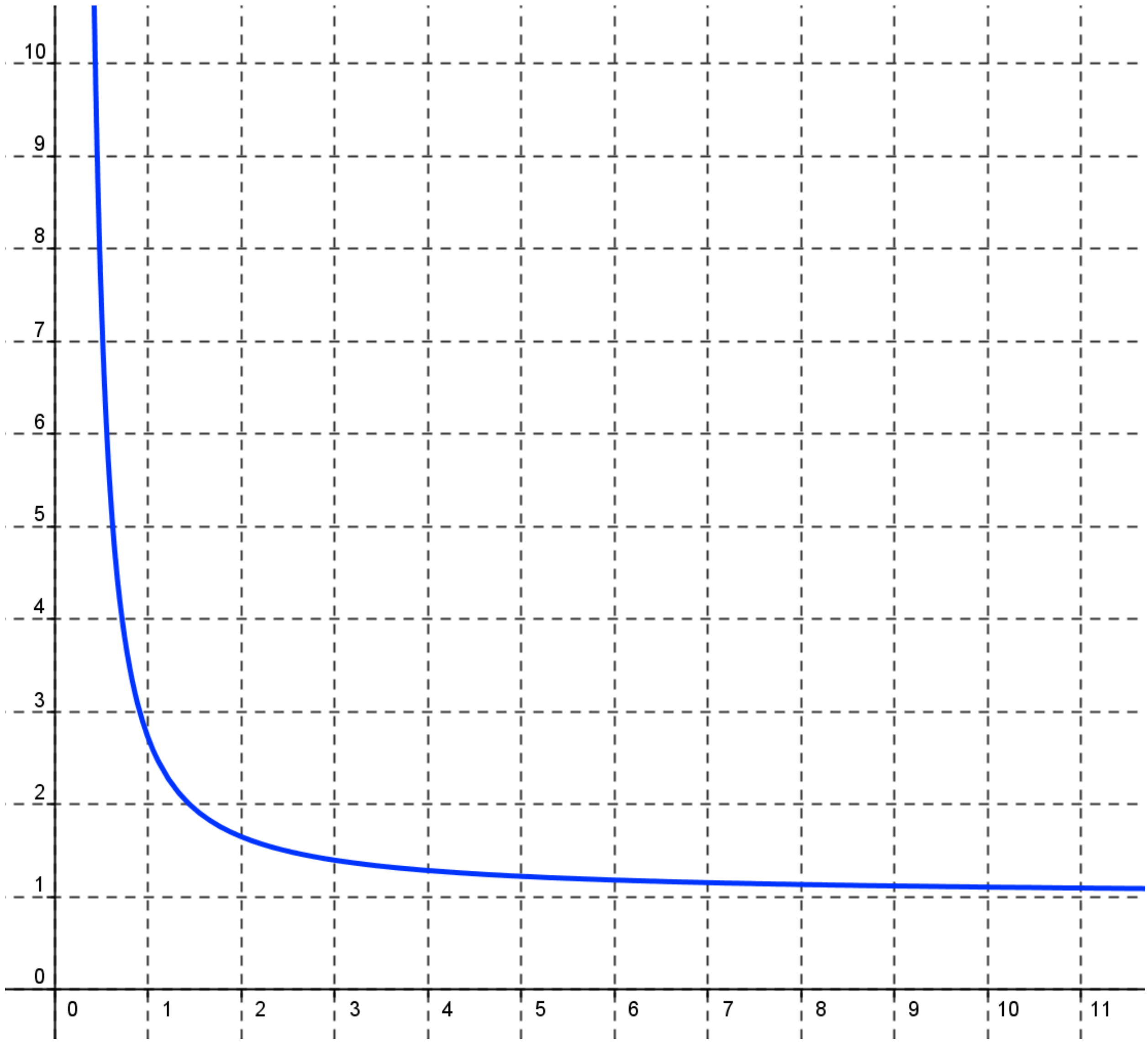
6) Étude de la suite (S_n).

/2 **a)** Exprimer S_n comme une somme de termes de la suite (u_n).

/2 **b)** Déterminer le sens de variation de (S_n).

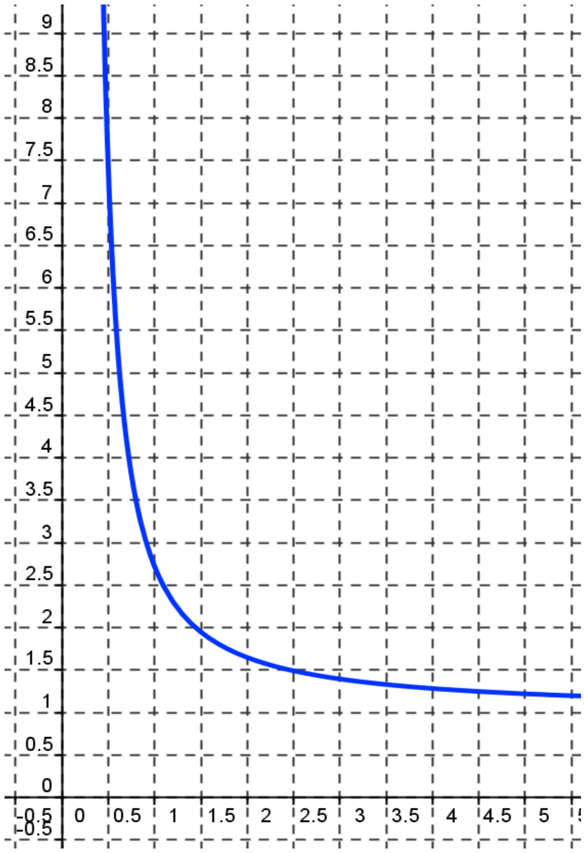
/2 **c)** Déterminer la limite de (S_n).

Annexe : Courbe représentative de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.



Partie III. Étude de deux suites

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(S_n)_{n\geqslant 1}$ les suites de terme général respectifs $u_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} e^{\frac{1}{x}}\,dx$ et $S_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} e^{\frac{1}{x}}\,dx$



7) Étude d'une aire. Dans le repère orthonormé donné en annexe, on a représenté la courbe représentative de la fonction f (la même fonction f que dans la première partie). Hachurer l'aire correspondant à u_1 puis en donner une approximation au centième d'unité d'aire près à la calculatrice.

8) Étude de la suite (u_n).

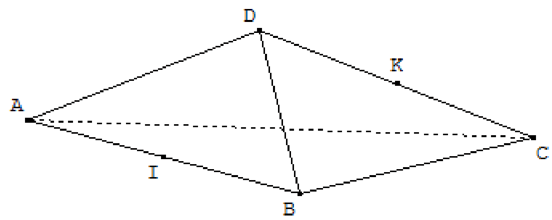
a) Donner un encadrement de $f(x)$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{n+1};\dfrac{1}{n}\right]$. *(Les bornes de l'encadrement ne doivent dépendre que de n.)*

b) En déduire que pour tout entier $n\geqslant 1$,

$$\frac{e^n}{n(n+1)}\leqslant u_n\leqslant\frac{e^{n+1}}{n(n+1)}$$

/10	**Exercice 2.** Cas particulier

ABCD est un tétraèdre. I et K sont les milieux respectifs de [AB] et [CD]. J et L sont les points définis par $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$.



Le but des questions 1 à 5 est de montrer que les droites (IL), (JK) et (BD) sont concourantes en un point R et de préciser la position de R sur (BD). La question 6 propose de démontrer un résultat similaire par des méthodes purement géométriques (sans utiliser les coordonnées).

/0,5 **1)** Expliquer pourquoi $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ constitue un repère de l'espace.

/1 **2)** Donner dans ce repère les cordonnées de tous les points de l'énoncé.

/1,5 **3)** Prouver que les points I, J, K et L sont coplanaires.

/1,5 **4) a)** Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (JK) et (IL).

/2 **b)** En déduire que les droites (IL) et (JK) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection. On appellera ce point R.

/1,5 **5)** Montrer que le point R appartient à la droite (BD) et préciser sa position sur (BD) en indiquant la valeur du réel λ pour laquelle on a $\overrightarrow{BR}=\lambda\overrightarrow{BD}$.

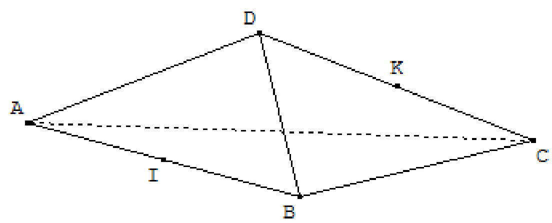
/2 **6)** Sans faire aucun calcul, prouver que les droites (KL), (IJ) et (AC) sont concourantes.
Indication : Quelle est l'intersection des plans (ABC) et (ACD) ?
Dans cette question, toute trace d'initiative même infructueuse sera valorisée.

/12	**Exercice 2 bis.** Cas général

ABCD est un tétraèdre. I et K sont les milieux respectifs de [AB] et [CD].

Soit a un réel tel que $a\in[0;1]$ avec $a\neq\frac{1}{2}$.

J et L sont les points définis par $\overrightarrow{AL}=a\,\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BJ}=a\,\overrightarrow{BC}$.



Le but des questions 1 à 5 est de montrer que les droites (IL), (JK) et (BD) sont concourantes en un point R et de préciser la position de R sur (BD). La question 6 propose de démontrer un résultat similaire par des méthodes purement géométriques (sans utiliser les coordonnées).

/0,5 **1)** Expliquer pourquoi $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ constitue un repère de l'espace.

/1,5 **2)** Donner dans ce repère les cordonnées de tous les points de l'énoncé.

/2 **3)** Prouver que les points I, J, K et L sont coplanaires.

/2 **4) a)** Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (JK) et (IL).

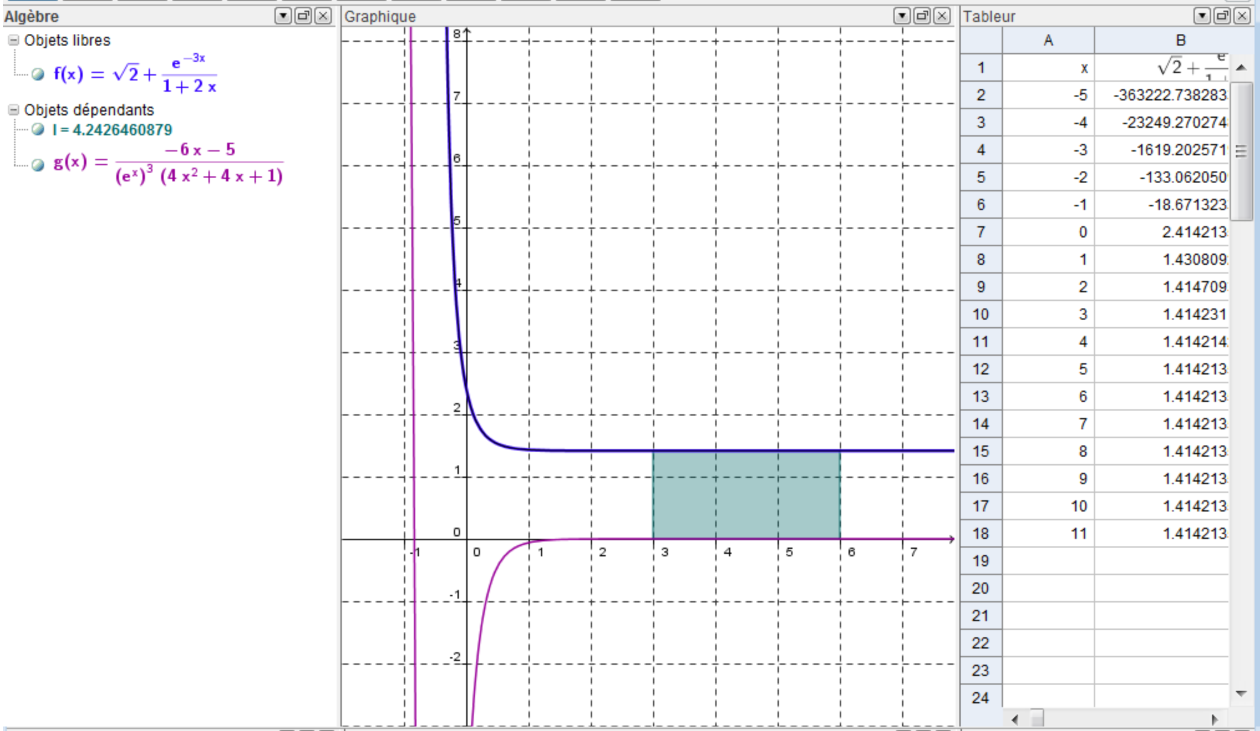
/2,5 **b)** En déduire que les droites (IL) et (JK) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection. On appellera ce point R.

/1,5 **5)** Montrer que le point R appartient à la droite (BD) et préciser sa position sur (BD) en indiquant la valeur du réel λ pour laquelle on a $\overrightarrow{BR}=\lambda\overrightarrow{BD}$.

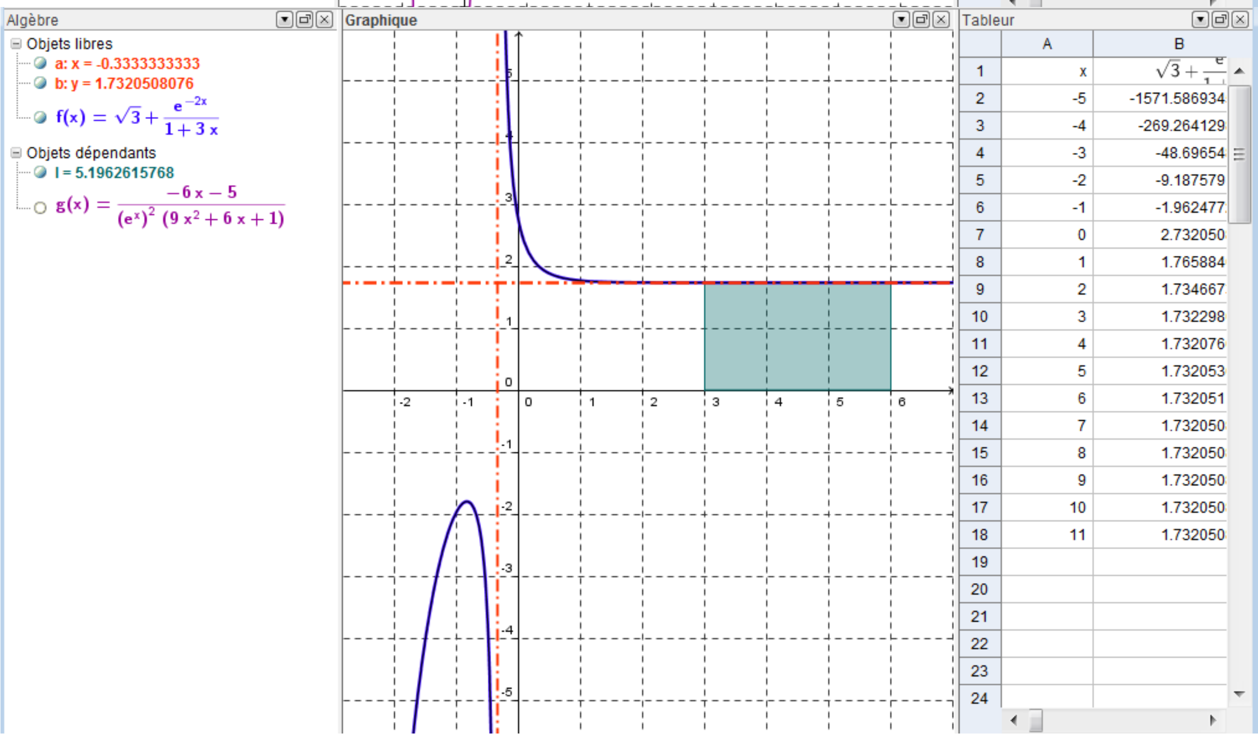
/2 **6)** Sans faire aucun calcul, prouver que les droites (KL), (IJ) et (AC) sont concourantes.
Indication : Quelle est l'intersection des plans (ABC) et (ACD) ?
Dans cette question, toute trace d'initiative même infructueuse sera valorisée.

CORRIGÉ du DS 4

Exercice 1.



	A	B
1	x	$\sqrt{2}+$
2	-5	-363222.738283
3	-4	-23249.270274
4	-3	-1619.202571
5	-2	-133.062050
6	-1	-18.671323
7	0	2.414213
8	1	1.430809
9	2	1.414709
10	3	1.414231
11	4	1.414214
12	5	1.414213
13	6	1.414213
14	7	1.414213
15	8	1.414213
16	9	1.414213
17	10	1.414213
18	11	1.414213
19		
20		
21		
22		
23		
24		



	A	B
1	x	$\sqrt{3}+$
2	-5	-1571.586934
3	-4	-269.264129
4	-3	-48.69654
5	-2	-9.187579
6	-1	-1.962477
7	0	2.732050
8	1	1.765884
9	2	1.734667
10	3	1.732298
11	4	1.732076
12	5	1.732053
13	6	1.732051
14	7	1.732050
15	8	1.732050
16	9	1.732050
17	10	1.732050
18	11	1.732050
19		
20		
21		
22		
23		
24		