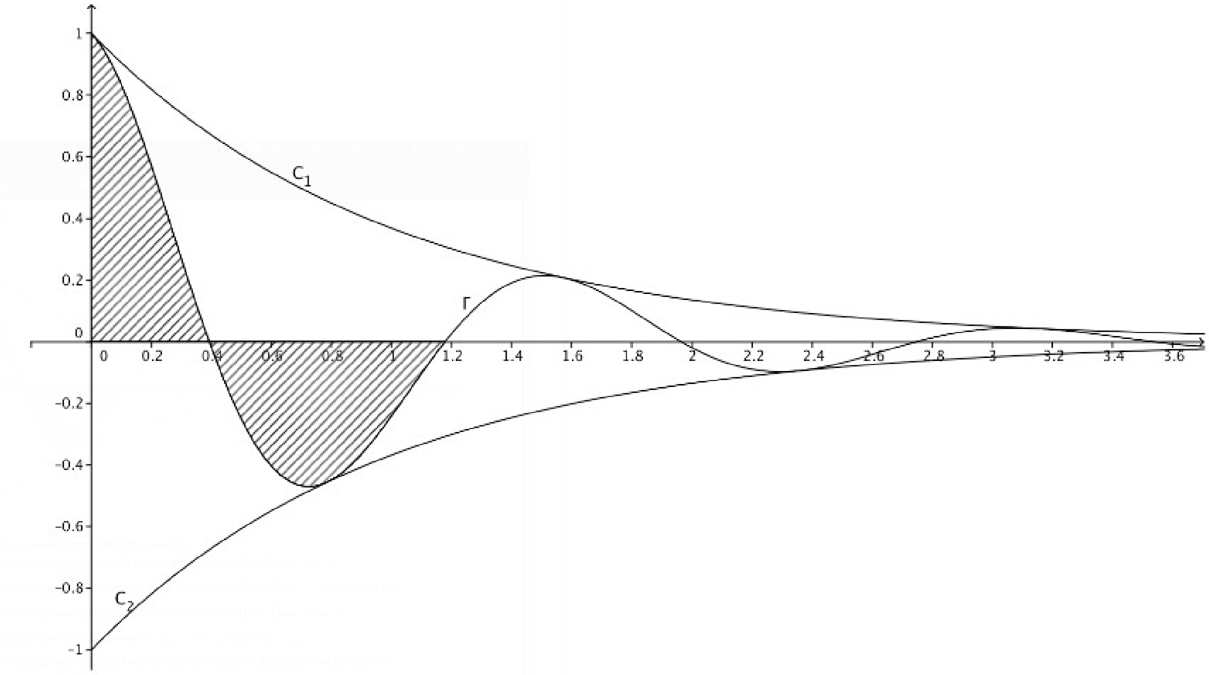
D.S. n°7 : Variables aléatoires continues & fonctions trigonométriques	TS1

Vendredi 21 mars 2014, 2h, **Calculatrices autorisées**. Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : + ± − Technique : + ± − Raisonnement : + ± −	Note : $\frac{}{20}$

/10

Exercice 1.



Le graphique ci-dessus représente trois courbes :

C_1 est la courbe représentative de la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f_1 : x \mapsto e^{-x}$

Γ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f : x \mapsto e^{-x} cos(4x)$

C_2 est la courbe représentative de la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f_2 : x \mapsto -e^{-x}$

1) a) Montrer que pour tout réel positif x , on a : $-e^{-x} \leqslant e^{-x} cos(4x) \leqslant e^{-x}$.

b) Comment peut-on interpréter graphiquement l'inégalité de la question précédente ?

c) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2) Déterminer l'expression de $f'(x)$.

3) a) Déterminer les abscisses des points d'intersections des courbes Γ et C_1 .

b) Montrer qu'en ces points les courbes Γ et C_1 ont les mêmes tangentes.

4) On note u_n l'ordonnée du point de la courbe Γ d'abscisse $\frac{n\pi}{2}$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa limite.

5) a) Résoudre l'équation $f(x)=0$.

b) En utilisant le résultat précédent et la calculatrice, donner une valeur approchée de la surface hachurée sur le graphique exprimée en unités d'aire (on arrondira à 0,01 près) puis exprimée en cm^2 (on arrondira au mm^2 près et on mesurera les unités sur le graphique).

/10

Exercice 2.

Sénégal en bocal et *Dakar en boite* sont des compagnies concurrentes qui mettent en bocal des haricotes verts. L'étiquette des bocaux indique une masse de 500 grammes. La loi en vigueur considère qu'un bocal est *mal rempli* s'il pèse moins de 485 grammes. Par ailleurs, si on met plus de 520 grammes de haricots verts dans un bocal, cela déborde. *On arrondira les probabilités à* 10^{-3}.

Partie A.

Chez *Sénégal en bocal*, la variable aléatoire X, qui à chaque bocal associe sa masse en grammes, suit une loi normale d'espérance 500 et d'écart-type 12.

1) Calculer la probabilité qu'un bocal soit mal rempli.

2) Calculer la probabilité qu'un bocal déborde.

3) Déterminer h tel que $\mathrm{P}(500-h\leqslant \mathrm{X}\leqslant 500+h)=0{,}95$.

4) On prélève au hasard un bocal conforme (càd bien rempli) à la sortie de la chaîne de production. Quelle est la probabilité qu'il ait débordé lors de son remplissage ?

Partie B.

Par peur d'un contrôle de la répression des fraudes, le service qualité de *Sénégal en bocal* souhaite parvenir à un pourcentage de bocaux mal remplis de 2%. Il se trouve que sur les machines de la chaîne de production, l'écart-type est fixe mais par contre on peut choisir la masse moyenne de remplissage des bocaux.

5) Sur quelle moyenne faut-il régler les machines pour que le pourcentage de bocaux mal remplis soit de 2%?

Sénégal en bocal adopte ce réglage et parvient donc à ce que le pourcentage de bocaux mal remplis soit de 2%. On teste alors un lot de 200 bocaux prélevés sur la production. (on considère qu'il s'agit de tirages avec remise indépendants). On note Y la variable aléatoire égale au nombre de bocaux mal remplis dans le lot.

6) Quelle loi suit Y ? Préciser son espérance.

7) Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=4)$.

Partie C.

Chez *Dakar en boite*, les bocaux sont remplis sur deux chaînes de production A et B. La chaîne A fournit 80% des bocaux, la chaîne B le reste. Personne chez *Dakar en boite* n'a su calculer la valeur sur laquelle régler les machines pour le pourcentage de bocaux mal remplis soit de 2% (ils regrettent sûrement tous de ne pas avoir fait plus de mathématiques lors de leurs études !). Les techniciens ont donc procédé par tâtonnement pour faire des réglages sur les machines. Ils sont quand même parvenus au niveau de l'usine au pourcentage de 2 % souhaité mais à cause des réglages différents opérés sur les différentes machines, le pourcentage de bocaux mal remplis n'est pas le même sur les deux chaînes de production. Ce n'est pas grave puisque pour le service des fraudes, seul compte le pourcentage de bocaux non conformes au niveau de l'usine, pas sur chaque chaîne. On sait que 1 % des bocaux produit par la chaîne A sont mal remplis.

On note A l'événement « *le bocal est produit par la chaîne A* » et M l'événement « *le bocal est mal rempli* ».

8) Représenter la situation par un arbre pondérée.

9) On sait que $P(M)=0{,}02$. Quelle est la probabilité qu'un bocal fourni par B soit mal rempli ?

[Aminata propose de remplacer « bien rempli » par « suffisamment rempli ». Adopté.
Évidemment, <u>du point de vue du service des fraudes</u> un bocal qui a débordé ne lèse pas le consommateur, ce qui les conduit à le considérer comme bien rempli, d'où la définition de « bocal bien rempli » de l'énoncé.]

CORRIGÉ du DS 7

Exercice 1.

1) a) Pour tout réel x, on a $-1 \leqslant e^{-x} cos(4x) \leqslant 1$. En multipliant par $e^{-x}>0$, on obtient bien $-e^{-x} \leqslant e^{-x} cos(4x) \leqslant e^{-x}$.

b) Graphiquement, l'inégalité de la question précédente signifie que Γ est située ente C_1 et C_2.

c) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -e^{-x} = 0$ donc, étant donné que $\forall x \in \mathbb{R},\ -e^{-x} \leqslant e^{-x} cos(4x) \leqslant e^{-x}$, par le théorème des gendarmes, on obtient $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.

2) Par la formule de dérivation d'un produit, on obtient $\boxed{f'(x) = e^{-x}(-cos(4x) - 4\,sin(4x))}$.

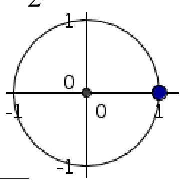
3) a) Les abscisses des points d'intersections des courbes Γ et C_1 sont les solutions de l'équation $f(x) = f_1(x)$. Or

$$f(x) = f_1(x) \Leftrightarrow e^{-x} cos(4x) = e^{-x} \overset{(i)}{\Leftrightarrow} cos(4x) = 1 \overset{(ii)}{\Leftrightarrow} 4x = 2k\pi, k \in \mathbb{N} \overset{(iii)}{\Leftrightarrow} x = \frac{2k\pi}{4}, k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{N}$$

(i) en divisant par $e^{-x} \neq 0$

(ii) lu sur le cercle trigonométrique ci-contre. On prend $k \in \mathbb{N}$ *au lieu du* $k \in \mathbb{Z}$ *habituel car l'énoncé dit que f est définie sur* $[0, +\infty[$ *, on doit donc avoir* $x \geqslant 0$.

(iii) en divisant tout par 4, y compris le $2k\pi$.



$\rightarrow$ Les abscisses des points d'intersections des courbes Γ et C_1 sont les nombres $\boxed{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{N}}$. *On vérifie bien sûr que c'est cohérent avec le graphique* ($\pi \approx 3{,}14$ *d'où* $\pi/2 \approx 1{,}57$.)

b) En $x = \frac{k\pi}{2}$, avec $k \in \mathbb{N}$, les tangentes aux courbes C_1 et Γ ont pour coefficients directeurs respectifs

$$f'\left(\frac{k\pi}{2}\right) = e^{-\frac{k\pi}{2}}\left[-cos\left(\frac{4k\pi}{2}\right) - 4\,sin\left(\frac{4k\pi}{2}\right)\right] = e^{-\frac{k\pi}{2}}[-cos(2k\pi) - 4\,sin(2k\pi)] = e^{-\frac{k\pi}{2}}[-1-0] = -e^{-\frac{k\pi}{2}}$$ et

$f_1'\left(\frac{k\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{k\pi}{2}}$ (car $f_1'(x) = -e^{-x}$). Leurs coefficients directeurs étant égaux, les tangentes sont parallèles. Comme elles passent par le même point, elles sont confondues.

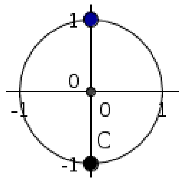
4) $u_n = f\left(\frac{n\pi}{2}\right) = e^{-\frac{n\pi}{2}} cos\left(\frac{4n\pi}{2}\right) = e^{-\frac{n\pi}{2}} cos(2n\pi) = e^{-\frac{n\pi}{2}} = \left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)^n$ est de la forme q^n. (u_n) est donc <u>géométrique</u> de raison $e^{-\frac{\pi}{2}}$. Comme $-1 < e^{-\frac{\pi}{2}} < 1$, un théorème sur les limites des suites géométriques permet d'affirmer que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 0}$

5) a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} cos(4x) = 0 \overset{(i)}{\Leftrightarrow} cos(4x) = 0 \overset{(ii)}{\Leftrightarrow} 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N} \overset{(iii)}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{N}$

(i) en divisant par $e^{-x} \neq 0$

(ii) lu sur le cercle trigonométrique ci-contre. On prend $k \in \mathbb{N}$ *au lieu du* $k \in \mathbb{Z}$ *habituel car l'énoncé dit que f est définie sur* $[0, +\infty[$ *, on doit donc avoir* $x \geqslant 0$.

(iii) en divisant tout par 4, y compris le $k\pi$.



$\rightarrow$ *On vérifie bien sûr que c'est cohérent avec le graphique.* ($\pi \approx 3{,}14$ *d'où* $\pi/8 \approx 0{,}39$ *et* $\pi/8 + \pi/4 \approx 1{,}18$.)

b) *Attention ! L'intégrale est égale à l'aire <u>algébrique.</u> Si la fonction est sous l'axe des abscisses comme c'est le cas lorsque* $\frac{\pi}{8} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{8}$ *, l'intégrale correspondante (qui est négative) est l'opposé de l'aire (qui elle est positive).*

L'aire cherchée est donc $\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} f(x)\,dx \approx 0{,}2177 + 0{,}2313 \approx 0{,}45\ u.a.$ (à la calculatrice).

$1\ u.a. \overset{(i)}{\approx} 3{,}83\,cm \times 3{,}83\,cm = 14{,}69\ cm^2$ d'où $\mathcal{A} \approx 0{,}45\ u.a. \approx 0{,}45 \times 14{,}69\ cm^2 \approx 6{,}61\ cm^2$.

(i) 11,5 cm =3 unités de longueur donc $1\,u.l. = \frac{11{,}5}{3}\,cm \approx 3{,}83\,cm$ $\boxed{\mathcal{A} \approx 0{,}45\ u.a. \approx 6{,}61\ cm^2.}$

Exercice 2.

Partie A.

Chez *Sénégal en bocal*, la variable aléatoire X, qui à chaque bocal associe sa masse en grammes, suit une loi normale d'espérance 500 et d'écart-type 12.

Soit M l'événement « *Le bocal est mal rempli* » et D l'événement « *Le bocal déborde* ».

1) La probabilité qu'un bocal soit mal rempli est $\boxed{P(M)=P(X<485)\approx 0{,}106}$ (*à la calculatrice*).

2) La probabilité qu'un bocal déborde est $\boxed{P(D)=P(X>520)\approx 0{,}048}$ (*à la calculatrice*).

3) Déterminer *h* tel que $\mathrm{P}(500-h\leqslant \mathrm{X}\leqslant 500+h)=0{,}95$.

Petite mise au point sur les valeurs à connaître pour les lois normales

L'idée générale : Avec une loi normale, pour avoir une probabilité d'À PEU PRÈS 95%, il faut prendre d'À PEU PRÈS 2 écart-types de part et d'autre de la moyenne.

Maintenant si on veut EXACTEMENT 95%, il faut prendre 1,96 écart-types de part et d'autre de la moyenne et si on veut si on veut EXACTEMENT 2 écart-types de part et d'autre de la moyenne, on a une probabilité de 95,4 %.

On déduit de ce rappel de cours qu' il faut prendre 1,96 écart-type de part et d'autre de la moyenne pour avoir $\mathrm{P}(500-h\leqslant \mathrm{X}\leqslant 500+h)=0{,}95$ d'où $\boxed{h=1{,}96\sigma\approx 23{,}5\ g}$ *(N'oubliez pas les unités dans les problèmes concrets!)*

4) La probabilité qu'un bocal conforme (càd bien rempli) ait débordé lors de son remplissage est

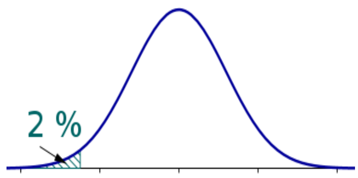
$$P_{\bar{M}}(D)=\frac{P(\bar{M}\cap D)}{P(\bar{M})}=\frac{P([X>485]\cap[X>520])}{P([X>485])}=\frac{P([X>520])}{P([X>485])}\approx\frac{0{,}04779}{1-0{,}01056}\approx 0{,}053.\quad \boxed{P_{\bar{M}}(D)\approx 0{,}053.}$$

→ La probabilité qu'un bocal conforme (càd bien rempli) ait débordé lors de son remplissage est 0,053.

Partie B.

5) On souhaite que $P(X<485)=0{,}02$.

Or $P(X<485)=0{,}02\Leftrightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{485-\mu}{\sigma}\right)=0{,}02$. Comme $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite, à la calculatrice [avec FracNormale ou InvNormal selon les calculatrices] on obtient $\frac{485-\mu}{\sigma}\approx -2{,}054$ d'où $\boxed{\mu\approx 509{,}6\ g}$. (puisque $\sigma=12$)



→ Pour que le pourcentage de bocaux mal remplis soit de 2% il faut régler les machines sur $\mu\approx 509{,}6\ g$.

6) Quelle loi suit Y ? Préciser son espérance.

• On répète 200 fois de façon identiques et indépendantes une épreuve qui n'a que deux issues : soit le bocal est mal rempli càd que sa masse est inférieure à 485 g (ce qui est considéré pour cette question comme un succès) soit la masse du bocal est supérieure à 485 grammes. La variable aléatoire Y qui donne le nombre de bocaux mal remplis compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli, elle suit donc une loi binomiale avec $n=200$ (*nombre de répétitions*) et $p=0{,}02$ (*probabilité d'avoir un succès*).

On attend trois arguments quand on demande de prouver qu'une variable suit une loi binomiale : Deux issues + répétitions identiques et indépendantes + la variable compte les succès.

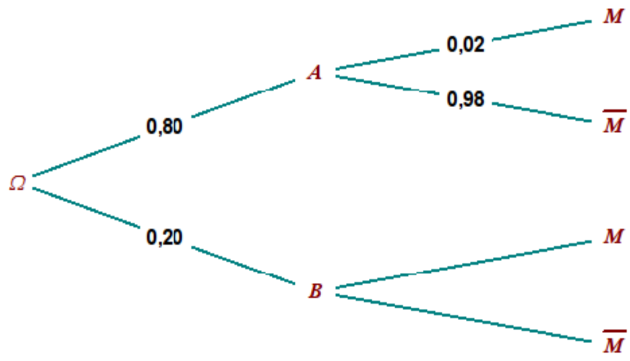
• $E(Y)=n\,p=200\times 0{,}02=4$

7) $P(Y=4)=\binom{200}{4}0{,}02^4(0{,}98)^{196}\approx 0{,}197$ car pour une loi binomiale, $P(X=k)=\binom{n}{k}p(1-p)^{n-k}$.

→ La probabilité que 4 bocaux sur un échantillon de 200 soient mal remplis est de 19,7 %.

Partie C.

8) Représenter la situation par un arbre pondérée.



9) On sait que $P(M)=0{,}02$. La probabilité qu'un bocal fourni par B soit mal rempli est $P_B(M)$.

Par la formule des probabilités totales,

$$p(M)=p(M\cap A)+p(M\cap A)=p(A)\times P_A(M)+p(B)\times P_B(M)=0{,}8\times 0{,}01+0{,}20\times P_B(M)=0{,}02$$

En résolvant cette équation, on trouve que la probabilité qu'un bocal fourni par B soit mal rempli est $\boxed{P_B(M)=0{,}06.}$

Exercice	**1**		**10**
1	*a*	0,5	
	b	0,5	
	c	1	
2		1	
3	*a*	1	
	b	1,5	
4		1,5	
5	*a*	1	
	b	2	
Exercice	**2**		**10**
1		0,5	
2		0,5	
3		1	
4		1	
5		2	
6		1,5	
7		1	
8		1	
9		1,5	
		#	**20**