D.S. n°8 : Loi binomiale & Trigonométrie — 1ère S

Mercredi 16 mai 2012, 55 minutes, **Calculatrices autorisées**

Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : + 0 − Technique : + 0 − Raisonnement : + 0 −	Signature des parents : $\mathcal{V}u$	Note : — **20**

/4 Exercice 1.

1) Résoudre l'équation $\sin 2x=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

/1,5 **a)** dans $\mathbb{R}$;

/1 **b)** dans $]-\pi;\pi]$.

/1,5 **2)** Placer les points images des solutions sur un cercle trigonométrique.

/10 Exercice 2.

Une classe de première S du lycée Jean Mermoz compte 24 élèves dont 10 filles. Leur professeure de mathématiques interroge un élève au début de chaque cours pour corriger le travail fait à la maison mais comme elle est très distraite, elle ne se rappelle jamais quels élèves elle a déjà interrogés. Soit n un entier positif ou nul. Soit X le nombre de filles interrogées lors de n cours consécutifs.

/2 **1)** Quelle est la loi de probabilités de X ?

/1 **2)** Quelle est la probabilité qu'exactement 4 filles soient interrogées lors de 10 cours consécutifs ? *On pourra noter cet événement E.*

/2 **3)** Quelle est la probabilité qu'au moins 3 filles soient interrogées lors de 10 cours consécutifs ? *On pourra noter cet événement F.*

/2 **4)** Une période de combien de cours consécutifs faut-il considérer pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée durant cette période soit inférieure à 0,001?

/2 **5)** Une année scolaire comporte environ 150 cours de mathématiques. A combien peut-on estimer le nombre de garçons qui seront interrogées au cours de l'année scolaire en mathématiques?

/6 Exercice 3.

Pour chacune des propositions (=phrases) suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier (Pas de points pour une réponse non justifiée.)

/1,5 **Proposition 1** : Étant donnés deux nombres a et b, si $\cos a=\cos b$, alors $\cos 2a=\cos 2b$.

/1,5 **Proposition 2** : Étant donnés des points A, B, C et D, si $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\frac{14\pi}{3}\ mod\ 2\pi$, alors $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})=-\frac{\pi}{3}\ mod\ 2\pi$ (*Rappel: Dire que des nombres sont égaux modulo* 2π *signifie qu'ils diffèrent d'un multiple de* 2π .)

/1,5 **Proposition 3** : Étant donnés deux nombres a et b, si $\sin a=\sin b$, alors $\sin 2a=\sin 2b$.

/1,5 **Proposition 4** : Étant donnés des points A, B, C, D, E et F, si $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\frac{3\pi}{4}\ mod\ 2\pi$ et $(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{CD})=\frac{5\pi}{4}\ mod\ 2\pi$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.

Corrigé du D.S. n°8 : Loi binomiale & Trigonométrie

Exercice 1.

1)a) Résolution dans $\mathbb{R}$ de $\sin 2x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

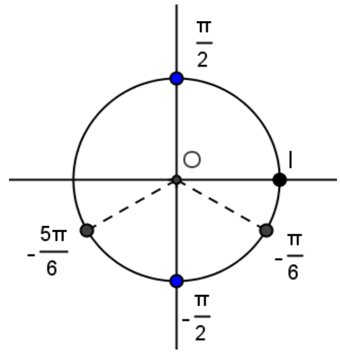
$$\sin 2x = \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow 2x = \left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \pi-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2k\pi$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \frac{3\pi}{2}+2k\pi$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}$$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont donc les nombres $x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et $x = \frac{\pi}{2}+\frac{2k'\pi}{3}$ avec $k, k' \in \mathbb{Z}$.

b) L'ensemble des solutions dans $]-\pi\,;\pi]$ est

$$S = \left\{-\frac{5\pi}{6}\,;\,-\frac{\pi}{2}\,;\,-\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{\pi}{2}\right\}$$

2)



Exercice 2.

1) Quelle est la loi de probabilités de X ?

- Interroger un(e) élève au début du cours est une <u>épreuve</u> de Bernoulli. En effet, il n'y a que deux issues possible : soit l'élève interrogé est un garçon, soit c'est une fille. On considère qu'on a obtenu un <u>succès</u> si l'élève choisi(e) est une fille. La probabilité d'un succès est donc 10/24.
- On répète cette <u>épreuve</u> de Bernoulli n fois. Les tirages sont faits avec remise, et comme la professeure ne se rappelle jamais quels élèves elle a déjà interrogés, les tirages sont indépendants et identiques. On a donc un un <u>schéma de Bernoulli.</u>
- La variable X q<u>ui compte le nombre de succès</u>[1] dans un <u>schéma de Bernoulli</u> suit donc une loi binomiale. Elle a pour paramètres n et $p = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.

2) la probabilité qu'exactement 4 filles soient interrogées lors de 10 cours consécutifs est $P(E) = P(X=4) = \binom{10}{4}\left(\frac{10}{24}\right)^4\left(\frac{14}{24}\right)^6 \approx 0{,}25$.

3) F est l'événement « *<u>au moins</u> 3 filles sont interrogées lors de 10 cours consécutifs* ». Autrement dit, $F = [X \geqslant 3]$. L'événement contraire est $\bar{F} = [X < 3]$

$$P(F) = 1-P(\bar{F}) = 1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)]$$
$$= 1-\left[\binom{10}{0}\left(\frac{10}{24}\right)^0\left(\frac{14}{24}\right)^{10}+\binom{10}{1}\left(\frac{10}{24}\right)^1\left(\frac{14}{24}\right)^9+\binom{10}{2}\left(\frac{10}{24}\right)^2\left(\frac{14}{24}\right)^8\right] \approx 0{,}858$$

4) La probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée lors de n cours consécutifs est $\left(\frac{14}{24}\right)^n$. On cherche donc la plus petite valeur de n pour laquelle $\left(\frac{14}{24}\right)^n < 0{,}001$. $\left(\frac{14}{24}\right)^n$ diminue quand n augmente et en faisant un tableau de valeurs à la calculatrice, on voit que $\left(\frac{14}{24}\right)^{12} \approx 0{,}00155 > 0{,}001$ et $\left(\frac{14}{24}\right)^{13} \approx 0{,}000906 < 0{,}001$. Il faut donc attendre <u>au moins 13 cours pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée durant cette période soit inférieure à 0,001</u>.

5) X suit une loi binomiale, son espérance est donc $E(X) = np = 150\times\frac{10}{24} = 62{,}5$. On peut donc estimer à le nombre de filles qui seront interrogées au cours de l'année scolaire en mathématiques à 62,5 et donc le nombre de filles qui seront interrogées au cours de l'année scolaire en mathématiques à $150-62{,}5 = 87{,}5$.

[1] *Et voilà pourquoi on a décidé que le choix d'une fille était un succès. Si X avait compté le nombre garçons interrogés, on aurait décidé que le choix d'un garçon était un succès.*

Remarque : On pourrait aussi répondre à cette question en prouvant que la variable aléatoire Y qui compte le nombre garçons interrogés suit une loi binomiale de paramètres n=150 et p=14/24 mais cela me semble plus long à rédiger.

Exercice 3.

Pour chacune des propositions (=phrases) suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier (Pas de points pour une réponse non justifiée.)

Proposition 1 : VRAI

Remarque : On ne vous demande pas si $\cos a=\cos b$ est *équivalent à* $\cos 2a=\cos 2b$ On vous demande si $\cos a=\cos b \Rightarrow \cos 2a=\cos 2b$. Il s'agir donc de savoir si en partant de $\cos a=\cos b$ on peut arriver à $\cos 2a=\cos 2b$. On peut, la preuve :

$$\begin{array}{lll} & \cos a=cosb & \\ \Leftrightarrow & a=b+2k\pi & \text{ou } a=-b+2k\pi \\ \Leftrightarrow & 2a=2b+4k\pi & \text{ou } 2a=-2b+4k\pi \\ \Rightarrow & \cos 2a=\cos(2b+4k\pi)=\cos 2\mathrm{b} & \text{ou } \cos 2a=\cos(-2b+4k\pi)=\cos 2\mathrm{b} \end{array}$$

Proposition 2 : **VRAI**

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\frac{14\pi}{3}\,mod\,2\pi \overset{(i)}{\Leftrightarrow} (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})=\frac{14\pi}{3}+\pi\,mod\,2\pi=\frac{14\pi}{3}+\pi-6\pi\,mod\,2\pi=-\frac{\pi}{3}\,mod\,2\pi$$

(i) car $(\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$

(*Rappel: Dire que des nombres sont égaux modulo* 2π *signifie qu'ils diffèrent d'un multiple de* 2π .)

Proposition 3 : FAUX

Pour montrer qu'une proposition est fausse, il suffit de donner un contre-exemple.

Prenons $a=\frac{\pi}{6}$ et $b=\pi-\frac{\pi}{6}$. $\sin a=\sin b$ et pourtant, comme $a=\frac{\pi}{3}$ et $b=2\pi-\frac{\pi}{3}$, on a $\sin 2a=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\neq-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2b$.

Proposition 4 : **FAUX**

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EF})\overset{(i)}{=}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{EF})\overset{(ii)}{=}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{CD})=\frac{3\pi}{4}-\frac{5\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}\,mod\,2\pi\neq 0\,mod\,\pi$$

(i) Par Chasles

(ii) car $(\vec{u},\vec{v})=-(\vec{v},\vec{u})$

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EF})\neq 0\,mod\,\pi$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ ne sont pas colinéaires.