SUJET G

D.S. n°8 : Fonctions Carré et Inverse — 2nde 5

Mardi 1er avril 2014, **Calculatrices autorisées**, Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : – ± + Technique : – ± + Raisonnement : – ± +	Note : $\overline{}$ **20**

Il faut toujours prouver vos affirmations *(sauf mention contraire de l'énoncé).*

/6,5

Exercice 1. *Manipulation réfléchie d'inégalités*

Donner le meilleur encadrement possible de $f(x)=\dfrac{-5}{(x-7)^2+4}$ sur $]1\,;3]$. *Justifier le passage d'une inégalité à l'autre. Il ne vous aura pas échappé que le but de l'exercice est avant tout de savoir si vous savez utiliser les règles de manipulations d'inégalités : Il faut donc <u>écrire toutes les étapes</u> et <u>citer les règles en toute lettres</u>. (Le résultat final est facile à deviner et n'est donc pas notre objectif principal.)*

/6,5

Exercice 2. *Vrai-Faux*

Cet exercice est un Vrai-Faux. Dire pour chacune des propositions suivantes si elle est vraie ou si elle est fausse. Chaque réponse devra être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point par contre toute trace de recherche même non concluante sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans tout l'exercice, x désigne un nombre réel.

1) Si $x\geqslant 9$ alors $x^2\geqslant 81$

2) Si $-2\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$ alors $0\leqslant x^2\leqslant 20$

3) Si $-1\leqslant x\leqslant 5$ alors $1\leqslant x^2\leqslant 25$

4) Si $x\leqslant 8$ alors $x^2\leqslant 64$.

/8

Exercice 3. *Lequel est le plus grand ? un nombre ou son inverse ?*

L'objectif de cet exercice est de comparer[1] x et $\dfrac{1}{x}$ selon les valeurs de x .

1) Victor souhaite écrire un algorithme qui demande x puis qui compare x et $\dfrac{1}{x}$. Il utilise pour cela des instructions à choisir dans la liste ci-dessous.

Liste des instructions que l'on peut utiliser :

A	Entrer $\dfrac{1}{x}$	B	Afficher $\dfrac{1}{x}$	C	Sinon	D	Si $x<\dfrac{1}{x}$
E	Entrer x	F	Afficher x	G	Afficher « *le plus grand des deux nombres est* »	H	Fin Si

Reconstituez l'algorithme en remplissant le tableau ci-dessous :

Par exemple, si vous pensez que le programme commence par l'instruction A, suivie de l'instruction C, puis de l'instruction F, notez dans le tableau :

A	C	F						

Certaines instructions peuvent ne pas être utilisées et certaines peuvent être utilisées deux fois. Certaines cases peuvent rester vides.

2) Au moyen d'un graphique (qui doit figurer sur votre copie), conjecturer lequel des deux nombres x et $\dfrac{1}{x}$ est le plus grand selon les valeurs de x .

3) Prouver votre conjecture par le calcul.

4) *<u>Bonus</u>* : Peut-on améliorer l'algorithme ?

[1]*Comparer cela veut dire déterminer lequel des deux est le plus grand.*

D.S. n°8 : Fonctions Carré et Inverse CORRIGÉ SG | 2nde 7

Exercice 1. *Manipulation réfléchie d'inégalités*

Donner le meilleur encadrement possible de $f(x)=\dfrac{-5}{(x-7)^2+4}$ sur $]1;3]$. *Justifier le passage d'une inégalité à l'autre.* Soit $x\in]1;3]$

$1<x\leqslant 3$

$\Rightarrow\ -6<x-7\leqslant -4$ *car* $x\mapsto x-7$ *(càd la fonction qui ajoute -7) est croissante sur* $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow\ 36>(x-7)^2\geqslant 16$ *car* $x\mapsto x^2$ *(càd la fonction carré) est décroissante sur* $]-\infty;0]$ *donc sur* $]-6;-4]$.

$\Rightarrow\ 40>(x-7)^2+4\geqslant 20$ *car* $x\mapsto x+4$ *(càd la fonction qui ajoute 4) est croissante sur* $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow\ \dfrac{1}{40}<\dfrac{1}{(x-7)^2+4}\leqslant\dfrac{1}{20}$ *car* $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ *est décroissante sur* $]0;+\infty[$ *donc sur* $[20;40[$.

$\Rightarrow\ \dfrac{-5}{40}>\dfrac{-5}{(x-7)^2+4}\geqslant\dfrac{-5}{20}$ *car* $-5<0$ *donc* $x\mapsto -5x$ *(càd la fonction qui multiplie par -5) est décroissante sur* $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{-1}{8}>\dfrac{-5}{(x-7)^2+4}\geqslant\dfrac{-1}{4}$

Finalement, on a prouvé que si $x\in]1;3]$ alors $-\dfrac{1}{4}\leqslant\dfrac{-5}{(x-7)^2+4}<-\dfrac{1}{8}$.

Exercice similaire à celui du DM (pour lequel je vous avais mis une correction en ligne) et à des exercices fait en classe. Aviez-vous fait des restitutions avant le DS ?

Exercice 2. *Vrai-Faux*

Cet exercice est un Vrai-Faux. Dire pour chacune des propositions suivantes si elle est vraie ou si elle est fausse. Chaque réponse devra être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point par contre toute trace de recherche même non concluante sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans tout l'exercice, x désigne un nombre réel.

1) Si $x\geqslant 9$ alors $x^2\geqslant 81$ **VRAI.** *Si* $x\geqslant 9$, *x est forcément positif. Or la fonction carré est croissante sur* $[0;+\infty[$ *donc* $x\geqslant 9\Rightarrow x^2\geqslant 81$

2) Si $-2\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$ alors $0\leqslant x^2\leqslant 20$ **VRAI.** *La fonction carré est décroissante sur* $]-\infty;0]$ *donc* $-2\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$ *entraîne* $(-2\sqrt{3})^2\geqslant x^2\geqslant(-1)^2$ *càd* $1\leqslant x^2\leqslant 12$. *Comme* $0<1\leqslant x^2\leqslant 12<20$, *on a bien* $0\leqslant x^2\leqslant 20$.

3) Si $-1\leqslant x\leqslant 5$ alors $1\leqslant x^2\leqslant 25$ **FAUX.** $x=0$ *est un contre-exemple puisque* $-1\leqslant 0\leqslant 5$ *et pourtant* $0^2<1$

4) Si $x\leqslant 8$ alors $x^2\leqslant 64$. **FAUX.** $x=-10$ *est un contre-exemple puisque* $-10\leqslant 8$ *et pourtant* $100=(-10)^2>64$.

Exercice 3. ***Lequel est le plus grand ? un nombre ou son inverse ?***

L'objectif de cet exercice est de comparer x et $\frac{1}{x}$ selon les valeurs de x .

1) Reconstituez l'algorithme en remplissant le tableau ci-dessous :

Une solution possible

E	G	D	B	C	F	H		

Une autre solution possible

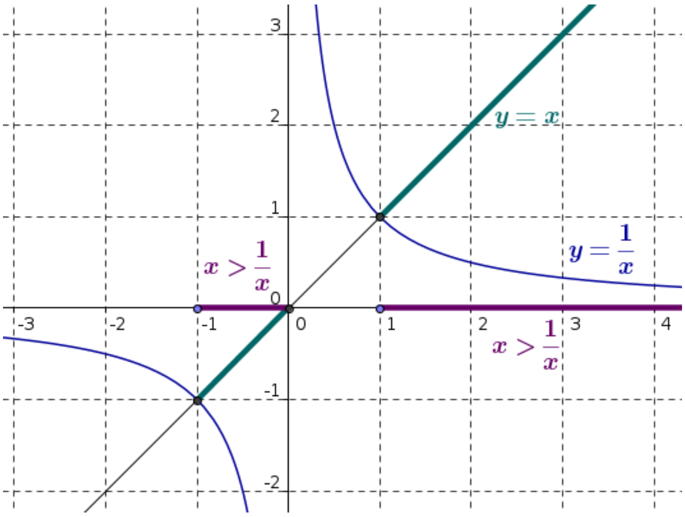
E	D	G	B	C	G	F	H	

avec

A	Entrer $\frac{1}{x}$		B	Afficher $\frac{1}{x}$		C	Sinon		D	Si $x<\frac{1}{x}$
E	Entrer x		F	Afficher x		G	Afficher « *le plus grand des deux nombres est* »		H	Fin Si

__*Remarque*__ *: Une fois qu'on a entré* x *, pas besoin de rentre* $\frac{1}{x}$ *: l'ordinateur le calculera. Cela peut même conduire à des erreurs si l'utilisateur se trompe et rentre des valeurs incompatibles de* x *et* $\frac{1}{x}$ *.*

2) Les solutions de l'inéquation $x>\frac{1}{x}$ sont les abscisses des points de la droite d'équation $y=x$ situés au-dessus de la courbe représentative de la fonction inverse d'équation $y=\frac{1}{x}$ d'où



Conjectures au vu du graphique :

- $x=\frac{1}{x}$ si $x=1$ ou $x=-1$
- $x>\frac{1}{x}$ si $x\in]-1;0[\cup]1;+\infty[$
- $\frac{1}{x}>x$ dans tous les autres cas.

3) Prouver votre conjecture par le calcul.

$x>\frac{1}{x}\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}>0\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{x}>0\Leftrightarrow\frac{(x-1)(x+1)}{x}>0$, inéquation que l'on résout par un tableau de signes.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{(x-1)(x+1)}{x}$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

→ On retrouve les résultats de la conjecture.

4) *__Bonus__* : Peut-on améliorer l'algorithme ?

Oui, pour inclure le cas $x=\frac{1}{x}$. Je vous laisse écrire la version améliorée.

<u>DS 8 205 Carré Inverse</u>

4			
Exerc **1**		**6,5**	
	1		-8
	1,5		carr
	1		5
	1,5		inv
	1		-4
	0,5		simplif
Exerc **2**		**6,5**	
1	1,5		
2	2		
3	1,5		
4	1,5		
Exerc **3**		**8**	
1	2		
2	2,5		
3	2,5		
	1		Bonus
		21	