D.S. n°8 : Fonctions de référence BONUS	2^{nde} 7

Mardi 9 avril 2013, **Calculatrices interdites**,
Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : − ± + Technique : − ± + Raisonnement : − ± +	Note : $\dfrac{\quad}{12} = \dfrac{\quad}{3}$

***Il faut toujours prouver vos affirmations** (sauf mention contraire de l'énoncé).*

/6

Exercice 1.

Cet exercice est un Vrai-Faux. Dire pour chacune des propositions suivantes si elle est vraie ou si elle est fausse. Chaque réponse devra être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point par contre toute trace de recherche même non concluante sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans tout l'exercice x désigne un nombre réel.

1) Si $-1 \leqslant x \leqslant 6$ avec $x \neq 0$ alors $-1 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{6}$

2) La fonction g définie par $g(x) = -3x^2 + 8x - 17$ admet un maximum en $x = \dfrac{4}{3}$ sur $[-\infty, +\infty[$.

3) Si $x \leqslant -3$ alors $x^2 \geqslant 9$

4) Si $x \leqslant 6$ alors $x^2 \leqslant 36$.

5) La fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{3}{x+2}$ est croissante sur $]-2, +\infty[$.

/6

Exercice 2. Le même exercice avec la fonction inverse au lieu de la fonction carré a été fait en classe

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative de f et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative de g .

/2 **1)** Tracer dans le même repère les courbes représentatives des fonctions f et g .

/2 **2)** Comparer graphiquement un réel non nul et son carré.

/2 **3)** Retrouver ce résultat par le calcul.

CORRIGÉ

Exercice 1. Le même exercice avec des nombres différents figurait dans la feuille de révision du DS

Point-méthode : Pour montrer qu'une proposition est vraie on la démontre avec des propriétés du cours et pour prouver qu'une proposition est fausse on donne un contre-exemple.

1) **<u>VRAI</u>** : Si $x \geqslant 3$, comme ces deux nombres sont positifs et que la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$, alors $x^2 \geqslant 9$.

2) **<u>VRAI</u>** : Si $-7 \leqslant x \leqslant -1$ comme ces trois nombres sont négatifs et que la fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$, alors $(-7)^2 \geqslant x^2 \geqslant (-1)^2$ càd $x^2 \in [1;49]$. Et comme l'intervalle $[1;49]$ est inclus dans l'intervalle $[0;50]$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 50$.

3) **<u>FAUX</u>** : $-1 \leqslant 0 \leqslant 6$ et pourtant $0^2 \notin [1;36]$ donc la condition $-1 \leqslant x \leqslant 6$ n'entraîne PAS $1 \leqslant x^2 \leqslant 36$.

4) **<u>FAUX</u>** : $-10 \leqslant 5$ et pourtant $(-10)^2 = 100 > 25$ donc la condition $x \leqslant 5$ n'implique PAS $x^2 \leqslant 25$.

Exercice 2. Le même exercice avec des nombres différents a été fait en devoir à la maison

1) La seule valeur interdite est celle qui annule le dénominateur donc le domaine de définition de f est $\boxed{D_f =]-\infty,-3[\cup]-3,+\infty[}$

2) a) $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0. Comme $f(0) = -\frac{5}{9}$, l<u>e point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées a pour coordonnés</u> $\left(0;-\frac{5}{9}\right)$.

b) Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses sont les solutions de $f(x)=0$. Or $f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{5}{(x+3)^2}$ ce qui est impossible. On en déduit que $\mathscr{C}$ <u>avec ne coupe pas l'axe des abscisses</u>.

3) a) *Sens de variation de f sur $]-\infty,-3[$* :

Soient $a, b \in]-\infty,-3[$ avec $a<b$.

$a<b<-3$

$\Rightarrow$ $a+3<b+3<-3+3=0$

$\Rightarrow$ $(a+3)^2>(b+3)^2$ *car $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty;0]$ (On applique la fonction carré aux nombre négatifs a+3 et b+3)*

$\Rightarrow$ $\frac{1}{(a+3)^2}<\frac{1}{(b+3)^2}$ *car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ (On applique la fonction inverse aux nombre <u>positifs</u> $(a+3)^2$ et $(b+3)^2$.)*

$\Rightarrow$ $\frac{-5}{(a+3)^2}>\frac{-5}{(b+3)^2}$ *car multiplier par un nombre négatif retourne les inégalités.*

$\Leftrightarrow$ $f(a)>f(b)$

Finalement, on a prouvé que pour tous réels a et b de $]-\infty,-3[$, $a<b \Rightarrow f(a)>f(b)$: f est donc décroissante sur $]-\infty,-3[$.

b) Tableau de variations de f

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↗	

4) a) Meilleur encadrement possible de f si $x \in [-2;7]$: $f(x) = \frac{-5}{(x+3)^2}$

Si $-2 \leqslant x \leqslant 7$ alors $f(-2) \leqslant f(x) \leqslant f(7)$ car f est croissante sur $]-3;+\infty[$, càd $\boxed{-5 \leqslant f(x) \leqslant -\frac{1}{20}}$.

b) Meilleur encadrement possible de f si $x\in[-10003\,;-4[$:
Si $-10003\leqslant x\leqslant -4$ alors $f(-10003)\geqslant f(x)\geqslant f(-4)$ car f est décroissante sur $]-\infty,-3[$. En remplaçant les bornes par leur valeur, on obtient : $\boxed{-5\leqslant f(x)\leqslant -5\times 10^{-8}}$.

5) Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x)\leqslant -20$. On suppose $x\neq -3$

$\dfrac{-5}{(x+3)^2}\leqslant -20$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(x+3)^2}\geqslant 4$ *car diviser par le nombre négatif -5 retourne les inégalités.*

$\Leftrightarrow (x+3)^2\leqslant \dfrac{1}{4}$ *car $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ (On applique la fonction inverse à des nombre positifs.)*

$\Leftrightarrow (x+3)^2-\dfrac{1}{4}\leqslant 0 \Leftrightarrow \left(x+3+\dfrac{1}{2}\right)\left(x+3-\dfrac{1}{2}\right)\leqslant 0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{7}{2}\right)\left(x+\dfrac{5}{2}\right)\leqslant 0$. On résout avec un tableau de signes :

x	$-\infty$	$-7/2$		-3		$-5/2$	$+\infty$
(x+7/2)	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$
(x+5/2)	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$
(x+7/2)(x+5/2)	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$

Finalement, $\boxed{f(x)\leqslant -20 \text{ ssi } x\in\left[-\dfrac{7}{2};-3\right[\cup\left]-3;-\dfrac{5}{2}\right]}$, ce que l'on peut vérifier graphiquement.

Exercice 3.

Posons $\ell=AG$ (ℓ exprimée en centimètres) ce qui permettra de ne faire qu'un corrigé pour les deux contrôle. Dans un des sujets $\ell=6$ et dans l'autre $\ell=8$.

1) On prouve par Pythagore que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a mesure $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. L'aire d'un triangle équilatéral de côté a vaut donc $A=\dfrac{\mathscr{B}\times h}{2}=a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

- L'aire du triangle équilatéral vaut MAC de côté x vaut donc $A_{MAC}=x^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
- Le carré STMG a pour côté $\ell-x$, son aire vaut donc $A_{STMG}=(\ell-x)^2$.
- L'aire totale est $A(x)=A_{MAC}+A_{STMG}=x^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}+(\ell-x)^2=x^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\ell^2+x^2-2\ell x=x^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}+1\right)-2\ell x+\ell^2$.

On retrouve bien la formule de l'énoncé.

2) Déterminer le tableau de variations de la fonction A.
A est un trinôme du second degré. Comme le coefficient de x^2 est positif la courbe représentative de A est une parabole tournée vers le haut. D'après le cours, son sommet a pour abscisse $x_S=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2\ell}{\dfrac{4+\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4\ell}{4+\sqrt{3}}$.

x	0		$\dfrac{4\ell}{\sqrt{3}+4}$		ℓ
A(x)	ℓ^2	↘	$A\left(\dfrac{4\ell}{\sqrt{3}+4}\right)$	↗	$\ell^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

3) On lit sur le tableau de variations que l'aire $A(x)$ est minimale lorsque $x=\dfrac{4\ell}{\sqrt{3}+4}$. (*La valeur minimale n'est pas demandée, on ne la calcule donc pas*).