D.S. n°8 : Nombres complexes & Logarithme	TS1

Vendredi 19 avril 2013, 2h, **Calculatrices autorisées**. Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : – ± + Technique : – ± + Raisonnement : – ± +	Note : $\overline{}$ **20**

/8,5 **Exercice 1.**

Partie I : R.O.C.

1) *On considérera connus les (uniquement) résultats suivants :*

- Toutes les propriétés de la fonction exponentielle sont supposés connues.
- $\forall\ x>0,\ e^{\ln x}=x$ et $\forall\ x\in\mathbb{R}\ \ \ln(e^x)=x$.

/2 Démontrer que $\forall\ a,b>0,\ \ln(ab)=\ln a+\ln b$ puis que $\forall\ a>0,\ \ln(a^2)=2\ln a$.

/1,5 **2) Application :** Sans calculatrice, calculer $A=\ln\left((3+2\sqrt{2})^2\right)+\ln\left((3-2\sqrt{2})^2\right)$.

Partie II :

Le but de cette partie est de démontrer la propriété (P): « *Pour tout entier $n \geqslant 4$ on a* $2^n\geqslant n^2$ »
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

/2,5 **1)** Déterminer le tableau de variations complet de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

/0,5 **2)** En déduire que pour tout entier $n \geqslant 4$, on a $\dfrac{\ln n}{n}\leqslant\dfrac{\ln 4}{4}$.

/1 **3)** Comparer $\dfrac{\ln 4}{4}$ et $\dfrac{\ln 2}{2}$.

/1 **4)** En déduire que la propriété (P) est vraie.

/1,5 **5)** *Bonus* : Trouver une autre démonstration du fait que la propriété (P) est vraie.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

/11,5	**Exercice 2.**

Partie I. Soient les nombres complexes $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$, $z_2=2+2i$ et $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$

/1,25 **1)** Écrire Z sous forme algébrique.

/2,5 **2)** Donner les modules et arguments de z_1 , z_2 et Z .

/0,75 **3)** En déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

/1,5 **4)** Le plan est muni d'un repère orthonormal; on prendra 2 cm comme unité graphique. On désigne par B_1 , B_2 et A_1 les points d'affixes respectives z_1 , z_2 et Z. Placer le point B_2 , puis placer les points B_1 et A_1 en utilisant la règle non graduée[1] et le compas (*On laissera les traits de construction apparents*).

Partie II. Étude d'une suite de points

Les questions de cette partie sont indépendantes.

Pour tout entier n , A_n désigne le point d'affixe Z^n .
(Le même Z qu'à la première partie évidemment)

/1,5 **5)** Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles A_n appartient à l'axe des ordonnées ? Si oui, lesquelles ?

6) a) On considère l'algorithme ci-contre.
Compléter : *« Le nombre complexe z obtenu en sortie de cet algorithme s'exprime en fonction de l'entier n et du nombre complexe $z_0=x_0+i\,y_0$ saisis en entrée par la formule z = ... »* /1

Entrées :	Saisir l'entier $n\geqslant 2$ et le nombre complexe $x_0+i\,y_0$.
Initialisation :	$x\leftarrow x_0$ et $y\leftarrow y_0$
Traitement :	Pour k allant de 2 à *n* | $x'\leftarrow x$ | $x\leftarrow x\,x_0-y\,y_0$ | $y\leftarrow x'\,y_0+x_0\,y$ Fin Pour
Sorties	Afficher $x+i\,y$

/1,5

/0,5 **b)** Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2013} , affixe du point A_{2013} .

c) A supposer que l'on ait programmé l'algorithme précédent sur un ordinateur ou une calculatrice, comment pourrait-on l'utiliser pour vérifier le résultat de la question b) ?

/1

7) On note Γ_n la ligne polygonale de sommets successifs $A_{0,}A_{1,}A_{2,}\dots A_n$. Soit t_n le nombre de tours que fait Γ_n autour de l'origine. Exprimer t_n en fonction de n (*La réponse peut contenir des fractions de tours comme dans 3 tours + un quart de tours*).

[1] *Vous pouvez utiliser les graduations de la règle pour graduer les axes du repère mais c'est tout.*

Corrigé

Exercice 1.

Partie I : R.O.C.

1) *On considérera connus les (uniquement) résultats suivants :*

- Toutes les propriétés de la fonction exponentielle sont supposés connues.
- $\forall\, x>0,\ \mathrm{e}^{\ln x}=x$ et $\forall\, x\in\mathbb{R}\ \ \ln(\mathrm{e}^x)=x$.

Démontrer que $\forall\, a,b>0,\ \ln(ab)=\ln a+\ln b$ puis que $\forall\, a>0,\ \ln(a^2)=2\ln a$

▪ *C'est la démonstration du cours* : Soient a et b deux réels strictement positifs. $\ln(ab)\overset{(i)}{=}\ln\left(\mathrm{e}^{\ln a}\mathrm{e}^{\ln b}\right)\overset{(ii)}{=}\ln\left(\mathrm{e}^{\ln a+\ln b}\right)\overset{(iii)}{=}\ln a+\ln b$, qui est le résultat cherché.
(i) car $a=\mathrm{e}^{\ln(a)}$ et $b=\mathrm{e}^{\ln(b)}$ vu que $a,b>0$; (ii) car $\forall\, x,y\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^{x+y}$; (iii) car $\forall\, x\in\mathbb{R}\ \ \ln(\mathrm{e}^x)=x$.

▪ Pour la seconde propriété, prendre $a=b$ dans la première.

2) Application : Sans calculatrice, calculer $A=\ln\left((3+2\sqrt{2})^2\right)+\ln\left((3-2\sqrt{2})^2\right)$.

$3+2\sqrt{2}>0$ et $3-2\sqrt{2}>0$ donc $A=\ln\left((3+2\sqrt{2})^2\right)+\ln\left((3-2\sqrt{2})^2\right)=2\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)+2\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)$

$=2\ln\left((3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right)=2\ln\left(3^2-(2\sqrt{2})^2\right)=2\ln(9-8)=2\ln 1=0$

<u>Remarque</u> : Il faut absolument préciser que $3-2\sqrt{2}>0$ car la formule $\ln(a^2)=2\ln a$ n'est vraie que si $a>0$. Par exemple $\ln 4=\ln\left((-2)^2\right)$ et pourtant $\ln 4\neq 2\ln(-2)$ car le membre de droite n'existe pas.

Partie II :

Le but de cette partie est de démontrer la propriété (*P*): « *Pour tout entier n ⩾ 4 on a* $2^n\geqslant n^2$ »

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]0;+∞[par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

1) Déterminer le tableau de variations complet de *f* sur l'intervalle]0;+∞[.

▪ <u>Dérivée</u> : $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ est du signe de $1-\ln x$ car $x^2>0$.

Or $1-\ln x\geqslant 0\Leftrightarrow \ln x\leqslant 1\Leftrightarrow x\leqslant e^1=e$ en composant par la fonction exponentielle qui est croissante.

▪ <u>Limites</u> : <u>*En +∞*</u> : D'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

<u>*En 0^+*</u>: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x}\ln x$. Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty$

donc par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1/e	↘	0

2) En déduire que pour tout entier *n* ⩾ 4, on a $\dfrac{\ln n}{n}\leqslant\dfrac{\ln 4}{4}$.

f est décroissante sur $[4;+\infty[$ donc pour tout entier $n\geqslant 4$, on a $f(n)\leqslant f(4)$ càd $\dfrac{\ln n}{n}\leqslant\dfrac{\ln 4}{4}$

3) Comparer $\dfrac{\ln 4}{4}$ et $\dfrac{\ln 2}{2}$. On a $\dfrac{\ln 4}{4}=\dfrac{\ln(2^2)}{4}=\dfrac{2\ln 2}{4}=\dfrac{\ln 2}{2}$ d'après le ROC. Finalement, $\boxed{\dfrac{\ln 4}{4}=\dfrac{\ln 2}{2}}$.

4) En déduire que la propriété (*P*) est vraie.

On a prouvé aux questions 2) et 3) que pour tout entier $n\geqslant 4$, on a $\dfrac{\ln n}{n}\leqslant\dfrac{\ln 4}{4}=\dfrac{\ln 2}{2}$.

Or $\dfrac{\ln n}{n}\leqslant\dfrac{\ln 2}{2}\overset{(i)}{\Leftrightarrow}2\ln n\leqslant n\ln 2\overset{(ii)}{\Leftrightarrow}\ln(n^2)\leqslant\ln(2^n)\overset{(iii)}{\Leftrightarrow}n^2\leqslant 2^n$.

(i) en multipliant les deux membres par 2 n >0
(ii) par les propriétés de la fonction ln
(iii) en composant par la fonction exponentielle qui est croissante.

5) <u>*Bonus*</u> : Trouver une autre démonstration du fait que la propriété (*P*) est vraie :

Par récurrence, en remarquant que $2^{n+1}=2\times 2^n=2[2^n-n^2+n^2]$, ce qui, couplé au fait que le trinôme $x\mapsto x^2-2x-1$ est positif si $n\geqslant 4$ permet de prouver l'hérédité. [Détails laissés au lecteur]

Exercice 2.

La partie I est un exercice sur 5 points du Bac Réunion et Métropole Sept 2007. Un exercice similaire a été fait en classe. La partie II ressemble au dernier DM.
http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/CorrigeLaReunionSsept2007.pdf

1) On a $Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2+2i}=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2(1+i)}=\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})(1-i)}{2(1+i)(1-i)}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

2) $|z_1|=2\sqrt{2}$ d'où $z_1=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $\arg(z_1)=\frac{\pi}{3}(2\pi)$

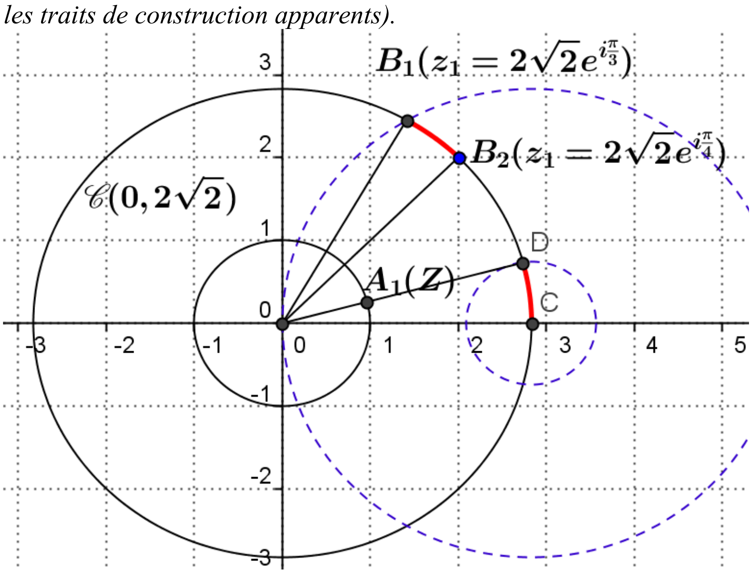
De même, $|z_2|=2\sqrt{2}$ d'où $z_2=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $\arg(z_2)=\frac{\pi}{4}(2\pi)$

On en déduit que $Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{\pi}{12}}$ donc $|Z|=1$ et $\arg(Z)=\frac{\pi}{12}(2\pi)$

Complexe	z_1	z_2	Z
Module	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	1
Argument	$\frac{\pi}{3}(2\pi)$	$\frac{\pi}{4}(2\pi)$	$\frac{\pi}{12}(2\pi)$

3) On déduit des deux questions précédentes que $Z=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$. Par identification des parties réelles et imaginaires de Z dans les deux expressions de Z, on obtient $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ et $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

4) *Placer le point* B_2*, puis placer les points* B_1 *et* A_1 *en utilisant la règle non graduée et le compas (On laissera les traits de construction apparents).*



- On place le point B_2 grâce à ses coordonnées. Par Pythagore, $OB_2=2\sqrt{2}$. C'est le rayon des grands cercles de la figure.
- Le point d'affixe z_1 est obtenu comme le troisième sommet d'un triangle équilatéral dont les sommets O et C sont déjà connus. C'est donc l'intersection des deux cercles de rayons $2\sqrt{2}$ sur la figure. On peut aussi l'obtenir en traçant la médiatrice de [OC].
- Le point D est obtenu en reportant l'arc $\overset{\frown}{B_1B_2}$ à partir de C. Il correspond donc à un angle de $\frac{\pi}{12}$. [OD] coupe le cercle de centre O et de rayon 1 en A_1. On peut aussi construire A_1 en coupant l'angle $\frac{\pi}{6}$ (à construire) en deux par une bissectrice.

Partie II. Étude d'une suite de points. Pour tout entier n, A_n désigne le point d'affixe Z^n.

5) A_n appartient à l'axe des ordonnées ssi son affixe Z^n est un imaginaire pur. Or un nombre complexe non nul est un imaginaire pur ssi son argument vaut $\frac{\pi}{2}+k\pi$. Or $arg(Z^n)=n\,arg(Z)=n\frac{\pi}{12}$.

$n\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow n=6+12k$ (en multipliant les deux membres par $\frac{12}{\pi}$)

$\boxed{\text{Finalement, } A_n \text{ appartient à l'axe des ordonnées ssi } n=6+12k \text{, avec } k\in\mathbb{Z}.}$

6) a) *« Le nombre complexe z obtenu en sortie de cet algorithme s'exprime en fonction de l'entier n et du nombre complexe* z_0 *saisis en entrée par la formule* $\boxed{z=z_0^n}$ »

b) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2013}, affixe du point A_{2013} .

$Z=e^{i\frac{\pi}{12}}$ donc $Z^{2013}=\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{2013}=e^{i\left(\frac{2013\pi}{12}\right)}\overset{(*)}{=}e^{i\frac{2013\pi}{12}-168\pi}=e^{-i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\boxed{Z^{2013}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(*) car enlever un nombre entier de fois 2π à l'argument ne change pas le complexe.

c) On rentre dans l'algorithme $z_0=Z$ et $n=2013$ et on vérifie qu'on obtient bien en sortie $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7) Chaque fois que l'on passe d'un point de la ligne polygonale Γ_n au suivant, on tourne de $\frac{\pi}{12}$ donc lorsqu'on en est au point A_n , on a tourné en tout d'un angle de $n\cdot\frac{\pi}{12}$. Sachant qu'un tour correspond à un angle de 2π , on a $n\frac{\pi}{12}=2\pi t_n$ càd $t_n=n\frac{\pi}{12}\div 2\pi=\frac{n}{24}$. $\boxed{t_n=\frac{n}{24}}$

<u>Remarque</u> : Le nombre <u>entier</u> de tours faits autour de O est la partie entière de t_n .