SUJET D

D.S. n°9 : Produit scalaire, Primitives, Échantillonnage — TS1

Jeudi 23 mai 2013, 2h, **Calculatrices autorisées**. Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : – ± + Technique : – ± + Raisonnement : – ± +	Note : $\frac{\quad}{20}$

(Bonus de 1 point intégré puisque la somme des points fait 21)

/16,5

Exercice 1.

Partie I. Étude de la convergence d'une suite

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_n=\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$.

1) Montrer que $u_0+u_1=1$.

2) Calculer u_1 . En déduire u_0.

3) Montrer que pour tout entier naturel *n*, $u_n\geqslant 0$.

4) a) Montrer que pour tout entier naturel *n* non nul, $u_{n+1}+u_n=\frac{1-e^{-n}}{n}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel *n* non nul, $u_n\leqslant\frac{1-e^{-n}}{n}$.

5) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Partie II. Calcul des termes de cette suite au moyen d'un algorithme.

En utilisant la relation de récurrence de la question 4a), compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il demande *n* en entrée et qu'il affiche en sortie la valeur de u_n .

Entrées :	Saisir un entier $n\geqslant 1$.
Initialisation :	. . . . → . . . .
Traitement :	Pour k allant de . . . . . . à . . . . . | . . . . →*U* Fin Pour
Sorties	Afficher *U*

/3

Exercice 2.

Dans un lycée qui comporte quatre classes de terminale S, une mère d'élève qui se trouve être une statisticienne, s'étonne du fait qu'il n'y ait que 9 filles sur les 30 élèves de la classe de TS1. Elle ajoute qu'au vu de l'intervalle de fluctuations asymptotique au seuil de 95%, il semble que les filles soient sous-représentées dans cette classe. Le professeur principal lui répond que suite aux changements de classe de début d'année liés à des problèmes de covoiturage par exemple (ou au désir de certains élèves de rester avec leurs copains), il a pu se produire un déséquilibre dans une classe donnée mais qu'il lui semble que globalement, les filles ne sont pas sous-représentées en TS au niveau de lycée. Il promet alors à la mère d'étudier la question avec l'aide la professeure de mathématiques de la classe et de la recontacter ultérieurement avec des réponses.

Les deux enseignants se mettent donc au travail et obtiennent de l'administration les données suivantes :

	TS1	TS2	TS3	TS4
Filles	9	14	16	13
Garçons	21	15	12	16

1) Cette mère d'élève a-t-elle raison de dire qu'au vu de l'intervalle de fluctuations asymptotique au seuil de 95%, il semble que les filles soient sous-représentées dans cette classe ?

2) a) Les filles sont-elles sous-représentées en TS dans ce lycée ?

b) Dans un lycée avec 116 élèves de TS, quel est l'effectif minimal de filles à avoir en TS pour que l'on ne puisse pas dire que les filles sont sous-représentées en TS ?

/2,5

Exercice 3.

Rina fait un stage à l'INSEE[1] au cours duquel on lui demande de calculer la probabilité que le nombre de garçons à naître en France l'année prochaine soit supérieur ou égal à 420 000. Son responsable de stage lui dit que les démographes estiment à 51,2% la probabilité qu'un bébé à naître soit un garçon et que sur une année on prévoit environ 820 000 naissances.

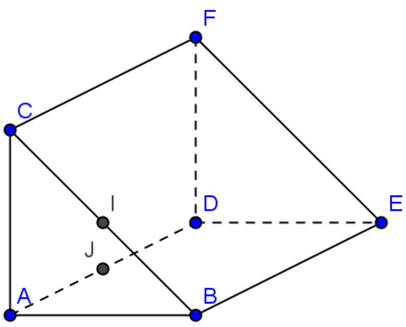
/0,75 **1)** Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X qui donne le nombre de garçons à naître sur une année ?

/1,75 **2)** Rina essaie donc de faire le calcul demandé avec cette loi mais les nombres en jeu sont trop gros pour sa calculatrice qui affiche « *dépassement de capacité* »[2]. Mais Rina a une idée pour trouver cette probabilité au moyen de sa calculatrice : Comment va-t-elle s'y prendre pour trouver une approximation de la probabilité cherchée ? Quelle valeur trouve-t-elle ?

/9

Exercice 4.

ABCDEF est un prisme droit[3] de hauteur $AD=2$. Sa base ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB=1$. I et J sont les milieux respectifs de [BC] et [AD].



/1,5 **1) Construction géométrique (sans coordonnées) de la section du prisme par (EIJ).**

a) Montrer que les droites (EI) et (CF) sont sécantes en un point M que l'on placera sur la figure ci-dessus.

b) Montrer que les droites (MJ) et (AC) sont sécantes en un point N que l'on placera sur la figure ci-dessus.

c) Construire sur la figure ci-dessus la trace de la section du prisme par le plan (EIJ).

/3,25 **2) Coordonnées des sommets de la section dans un repère bien choisi**. On munit l'espace du repère $(A;\vec{AB},\vec{AJ},\vec{AC})$.

a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$ est normal au plan (EIJ).

b) En déduire une équation du plan (EIJ).

c) Déterminer les coordonnées du point N.

/4,25 **3) Étude de la section obtenue**.

a) Donnez une valeur arrondie à 0,1 degrés près de l'angle $\widehat{IEJ}$.

b) Déterminer les coordonnées du point G d'intersection des diagonales de cette section et préciser sa position sur (IJ) en donnant la valeur de λ pour laquelle $\vec{IG}=\lambda\vec{IJ}$.

c) Dessiner cette section en vraie grandeur. On prendra 4 cm comme unité.

[1] *INSEE=Institut national de la statistique et des études économiques. L'INSEE est chargé de la production, de l'analyse et de la diffusion des statistiques officielles en France*

[2] *C'est en tout cas ce qu'affiche ma calculatrice.*

[3] *On rappelle qu' un prisme droit est un solide possédant deux faces superposables appelées bases et dont toutes les autres faces sont des rectangles.*

Corrigé

♠ Corrigé de l'exercice 1.

Partie I. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$.

1) a) $u_0+u_1=\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx+\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$. Par linéarité de l'intégrale, $u_0+u_1=\int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx=\int_0^1 1\,dx=[x]_0^1=1$.

b) $u_1=\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$. On pose $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$, on remarque que $f=-\frac{u'}{u}$ où $u(x)=1+e^{-x}>0$. f a pour primitive $F=-\ln(u)$. $u_1=[-\ln(1+e^{-x})]_0^1=\ln(2)-\ln(1+e^{-1})$. $\boxed{u_1=\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)}$

D'après la question 1.a., $u_0=1-u_1=1-\ln(2)+\ln(1+e^{-1})=\ln(e+1)-\ln(2)$ $\boxed{u_0=\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}$

2) Pour tout entier naturel n, et pour tout réel x, $e^{-nx}>0$ et $1+e^{-x}>0$ donc $\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}>0$. L'intégrale sur l'intervalle $[0;1]$ d'une fonction positive est positive donc u_n est positive ou nulle.

3) a) Pour tout entier naturel $n>0$, $u_{n+1}+u_n=\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,dx+\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$. Par linéarité de l'intégrale,

$u_{n+1}+u_n=\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}+e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx=\int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}}\,dx=\int_0^1 e^{-nx}\,dx=\left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1=\frac{1-e^{-n}}{n}$ $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}+u_n=\frac{1-e^{-n}}{n}.}$

b) Pour tout entier naturel n non nul, d'après la question 2., $u_n\geqslant 0$ donc $u_{n+1}\geqslant 0$ or, d'après la question 3., $u_n=\frac{1-e^{-n}}{n}-u_{n+1}$ donc $u_n\leqslant\frac{1-e^{-n}}{n}$. $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n\leqslant\frac{1-e^{-n}}{n}.}$

4) Pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n\leqslant\frac{1-e^{-n}}{n}$. Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{1-e^{-n}}{n}=0$ (car e^{-n} tend vers 0 ainsi que $\frac{1}{n}$). Selon le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge aussi vers zéro.

Partie II.

Entrées :	Saisir un entier $n\geqslant 1$.
Initialisation :	$\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)\to U$
Traitement :	Pour k allant de 1 à $n-1$ $\frac{1-e^{-k}}{k}-U\to U$ Fin Pour
Sorties	Afficher U

Remarques:
On démarre à $k=1$ car on divise par k donc $k=0$ est impossible. Du coup, on initialise U à $U=u_1=\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$.
Ceci permet de calculer u_2 avec la formule de récurrence puisque d'après 3.a) $\frac{1-e^{-1}}{1}-u_1=u_2$ ...etc. La boucle avec $k=1$ calcule u_2, la boucle avec $k=2$ calcule u_3 ...etc. La boucle avec $k=n$ calcule u_{n+1}, on arrête donc la boucle à $k=n-1$ pour avoir u_n en sortie.

♠ Corrigé de l'exercice 2.

On commence par compléter le tableau en ajoutant une ligne et une colonne pour les totaux.

	TS1	TS2	TS3	TS4	***TOT***
Filles	9	14	16	13	***52***
Garçons	21	15	12	16	***64***
TOT	***30***	***29***	***28***	***29***	***116***

1) Supposons que dans cette classe les filles ne soient ni sous-représentées ni sous-représentées. C'est notre **hypothèse initiale, celle que nous voulons tester**. La proportion théorique de filles sous cette hypothèse est de 50% càd $p=0{,}5$.

Il y a 30 élèves dans la classe donc $n=30$. Pour la classe de TS1, l'intervalle de l'intervalle de fluctuations asymptotique au seuil de 95% est (avec $n=30$ et $p=0{,}5$) $IFA_{TS1}=\left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\approx[32\,\%;68\,\%]$. Comme les conditions $n\geqslant 30, np\geqslant 5$ et $n(1-p)\geqslant 5$ sont remplies, pour environ 95% des échantillons de 30 individus tirés au hasard, la proportion de fille devrait être dans cet intervalle. Or dans cette classe la fréquence observée $f=\frac{9}{30}=30\,\%$ n'appartient pas à cet intervalle. On rejette donc l'hypothèse initiale : <u>La mère d'élève a raison de dire qu'au vu de l'intervalle de fluctuations asymptotique au seuil de 95%, il semble que les filles soient sous-représentées dans cette classe</u>.

2) a) Les filles sont-elles sous-représentées en TS dans ce lycée ?

Même démarche avec un n différent : Supposons que dans ce lycée les filles ne soient ni sous-représentées ni sous-représentées. C'est notre hypothèse initiale, celle que nous voulons tester. La proportion théorique de filles sous cette hypothèse est de 50% càd $p=0{,}5$.

Il y a 116 élèves de TS dans ce lycée donc $n=116$. Pour ce lycée, l'intervalle de l'intervalle de fluctuations asymptotique au seuil de 95% est (avec $n=116$ et $p=0{,}5$) $IFA_{Lyc}=\left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\approx[40{,}9\,\%;59{,}1\,\%]$. Comme les conditions $n\geqslant 30, np\geqslant 5$ et $n(1-p)\geqslant 5$ sont remplies, pour environ 95% des échantillons de 116 individus tirés au hasard, la proportion de fille devrait être dans cet intervalle. Or dans ce lycée la fréquence observée $f=\frac{52}{116}=44{,}8\,\%$ appartient à cet intervalle. On ne peut pas rejeter l'hypothèse initiale : <u>On ne peut pas affirmer que les filles sont sous-représentées en TS dans ce lycée</u>.

b) Dans un lycée avec 116 élèves de TS, quel est l'effectif minimal de filles à avoir en TS pour que l'on ne puisse pas dire que les filles sont sous-représentées en TS ?

On vient de voir que pour $n=116$, il faut au moins 40,9% de filles. Il faut donc au moins 40,9% de 116 filles càd <u>48 filles.</u> (49% de 116=47,4)

♠ <u>Corrigé de l'exercice 3</u>.

1) Pour chaque naissance, il y a deux issues possibles : Le bébé est soit un garçon (considéré comme un succès) soit un fille. Les naissances sont indépendantes et identiques dans le sens où la probabilité d'avoir un garçon est la même à chaque naissance. La variable aléatoire X qui donne le nombre de garçons à naître sur une année compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli, elle suit donc une loi binomiale avec $n=820000$ et $p=0{,}512$.

2) Rina va utiliser le théorème de Moivre-Laplace qui permet d'approximer une loi binomiale par une loi normale. On a $E(X)=\mu=np=820\,000\times 0{,}512=419\,840$ et l'écart-type $\sigma=\sqrt{np(1-p)}\approx 452{,}64$.

$$P(X\geq 420\,000)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\geq\frac{420000-\mu}{\sigma}\right)\overset{(i)}{\approx}P\left(Z\geq\frac{420000-419840}{452{,}64}\right)P(Z\geq 0{,}3535)\approx 36{,}2\,\%$$

(i) Par l'application pratique du théorème de Moivre Laplace, utilisable car $n\geqslant 30, np\geqslant 5$ et $n(1-p)\geqslant 5$ où Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$

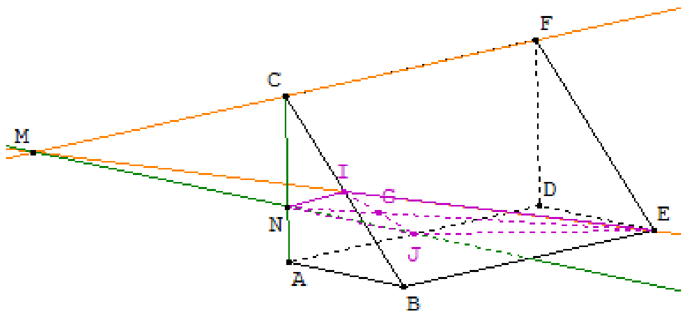
<u>La probabilité que le nombre de garçons à naître en France l'année prochaine soit supérieur ou égal à 420 000 est d'environ 36 %</u>.

♠ <u>Corrigé de l'exercice 4</u>.

1) a) Les droites (EI) et (CF) sont toutes deux contenues dans le plan (BCE). Comme elles sont <u>coplanaires</u> et non parallèles, elles sont sécantes.

b) Les droites (MJ) et (AC) sont toutes deux contenues dans le plan (ACD). Comme elles sont <u>coplanaires</u> et non parallèles, elles sont sécantes.

[LHG : On attend avant tout le mot « coplanaires » dans votre justification.]



c) Section du prisme par le plan (EIJ). Les points E, I et J appartiennent par définition au plan (EIJ) donc la seule chose à prouver est que N appartient au plan (EIJ). Or le point M appartient à la droite (EI) contenue dans le plan (EIJ) donc le point M appartient au plan (EIJ). Ensuite, puisque M et J appartiennent au plan (EIJ), la droite (MJ) aussi. Or le point N appartient à la droite (MJ) donc l<u>e point N appartient au plan (EIJ)</u>.

Les points E, I, J et N sont donc les points d'intersection des arêtes du prisme avec le plan (EIJ), il ne reste donc plus qu'à les joindre pour obtenir la section.

2) $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ $E\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ $I\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\end{pmatrix}$ $J\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et on verra que $N\begin{pmatrix}0\\0\\1/3\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}1/4\\1/2\\1/4\end{pmatrix}$.

2a) Pour montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$ est normal au plan (EIJ), il suffit de montrer que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EIJ) [LHG : Cette phrase est indispensable].

Par le calcul, avec $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}-1/2\\-2\\1/2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$, on a bien $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EI}}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EJ}}=0$.

2b) En déduire une équation du plan (EIJ). Soit P un point de l'espace.

$$\mathrm{P}(x,y,z)\in(\mathrm{EIJ})\Leftrightarrow\overrightarrow{JP}.\vec{n}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y-1\\z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow x-y-3z+1=0 \qquad \boxed{\text{Équation de }(EIJ): x-y-3z+1=0}$$

2c) Déterminer les coordonnées du point N.

$\mathrm{N}\in(\mathrm{AC})$ donc il existe t tel que $\overrightarrow{\mathrm{AN}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, ce qui donne $x_{\mathrm{N}}=0, x_{\mathrm{N}}=0$ et $z_{\mathrm{N}}=t$. En reportant ces coordonnées dans l'équation du plan (EIJ), on obtient $t=z=\frac{1}{3}$, d'où $\boxed{\mathrm{N}\left(0;0;\frac{1}{3}\right)}$.

3) Étude de la section obtenue.

3a) Donnez une valeur arrondie à 0,1 degrés près de l'angle $\widehat{\mathrm{IEJ}}$.

$\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix}-1/2\\-2\\1/2\end{pmatrix}$ d'où $EI=\frac{3}{\sqrt{2}}$ et $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ d'où $EJ=\sqrt{2}$.

$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EJ}=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}=\frac{3}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}\times\cos(\widehat{IEJ})$ d'où $\frac{5}{2}=3\cos(\widehat{IEJ})$ d'où $\cos(\widehat{IEJ})=\frac{5}{6}$ d'où $\boxed{\widehat{IEJ}\approx 33{,}6\,°}$

3b) Déterminer les coordonnées du point G d'intersection des diagonales de cette section et préciser sa position sur (IJ) en donnant la valeur de λ pour laquelle $\overrightarrow{\mathrm{IG}}=\lambda\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$.

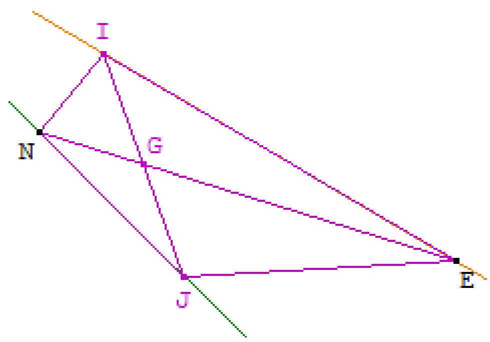
$I\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix}$ donc $\begin{cases}x=\quad -t\\ y=1+2t\\ z=\quad -t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de (IJ), en choisissant $2\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ comme vecteur directeur de (IJ).

$N\begin{pmatrix}0\\0\\1/3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NE}\begin{pmatrix}1\\2\\-1/3\end{pmatrix}$ donc $\begin{cases}x=\quad s\\ y=\quad 2s\\ z=1/3-1/3\,s\end{cases}$ $(s\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de (NE).

Les coordonnées de G satisfont les deux équations. On résout donc $\left\{\begin{array}{rcll} -t & = & s & (L_1)\\ 1+2t & = & 2s & (L_2)\\ -t & = & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}s & (L_3)\end{array}\right| \begin{array}{l}-2\\1\\ \\ \end{array}$.

$-2(\mathrm{L}_1)+(\mathrm{L}_2): 1+4t=0$ càd $t=\frac{1}{4}$. On reporte cette valeur dans (L_1) , par ailleurs on multiplie (L_3) par 3 et on obtient alors le système suivant, équivalent au système initial : $\begin{cases} t=-1/4\\ s=1/4\\ -3t=1-s\end{cases}$. En remplaçant s et t par leurs valeurs dans la dernière équation, on voit que le système est compatible donc G a pour coordonnées $\boxed{\mathrm{G}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)}$.

$\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}-1/4\\1/2\\-1/4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{IG}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$. Autrement dit, <u>G est le milieu de [IJ]</u>.



3c) Construction IEJN en vraie grandeur : On trace le triangle EIJ connaissant EI, EJ et $\widehat{\mathrm{IEJ}}$. Quelqu'un qui n'a pas su calculer l'angle ou qui n'est pas sûr de son calcul peut aussi calculer EI, EJ et IE et tracer le triangle EIJ connaissant la longueur de tous ses côtés. Ensuite, on place G le milieu de [IJ] et on trace (EG). On sait que $N\in(\mathrm{EG})$. On calcule la longueur $\mathrm{IN}=\frac{\sqrt{10}}{6}$. Le cercle de centre I et de rayon $\frac{\sqrt{10}}{6}$ unités de longueur (à multiplier par 4 pour avoir des centimètres) coupe (EG) en N.

<u>Autre méthode pour tracer N</u> : On peut aussi calculer IN et JN et tracer le triangle IJN connaissant la longueur de tous ses côtés.

Vérification de la figure : D'après 3b) les diagonales doivent se couper au milieu de [IJ].