SUJET D

D.S. n°9 : Vecteurs	2^{nde} 7

Vendredi 26 avril 2013, 55 min. Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : + ± − Technique : + ± − Raisonnement : + ± −	Signature des parents : Vu	Note : $\frac{}{20}$

Il faut toujours prouver vos affirmations (sauf mention contraire de l'énoncé) et, lorsque vous justifiez vos réponses, la propriété employée doit apparaître clairement.

/7

Exercice 1.

Cet exercice est un Vrai-Faux. Dire pour chacune des propositions suivantes si elle est vraie ou si elle est fausse. Chaque réponse devra être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point par contre toute trace de recherche même non concluante sera prise en compte dans l'évaluation.

1) Si M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{RS}$ alors les segments [MS] et [RM'] ont le même milieu.

2) Si $AI=IB$ alors I est le milieu de $[AB]$.

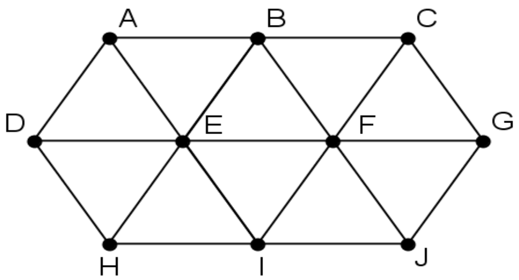
3) Si $\overrightarrow{EC}=3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}=-6\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

4) Si ABCD et CDEF sont tous les deux des parallélogrammes alors ABFE est lui aussi un parallélogramme.

/4

Exercice 2. *Graphiquement*

La figure ci-dessous est un assemblage de triangles équilatéraux. Compléter sans justifications les phrases ci-dessous en remplaçant les pointillés par une lettre.



1) $\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{J\ldots}$

2) $\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{D\ldots}$

3) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{B\ldots}$

/9

Exercice 3.

<u>Partie I</u> : Étude d'un cas particulier. Dans un repère du plan les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $A\left(2;\frac{2}{3}\right)$, $B(4;-2)$ et $C\left(-2;\frac{4}{3}\right)$.

/1,5 **1)** Faire une figure que vous compléterez au fur et à mesure que de nouveaux points apparaissent dans l'énoncé.

/2 **2)** Déterminer par le calcul les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

/2 **3)** Déterminer par le calcul les coordonnées du point G défini par $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

/1 **4) a)** Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$.

/2,5 **b)** D'après votre figure, que peut-on conjecturer pour les points B, G et D ? Démontrer cette conjecture.

<u>Partie II</u> : Cas général

/1,5 **5)** *Bonus* : Démontrer que, avec G et D définis comme ci-dessus, cette conjecture est valable quelles que soient les coordonnées de A, B et C.

Corrigé

Exercice 1.

1) **<u>VRAI</u>**. Si M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{RS}$ alors $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{RS}$ donc MM'SR est un parallélogramme donc ses diagonales, qui sont les segments [MS] et [RM'], ont le même milieu.

2) **<u>FAUX</u>**. Rien n'impose à A, I et B d'être alignés. Si AIB est un triangle non aplati isocèle en I, alors $AI=IB$ et pourtant I n'est PAS le milieu de $[AB]$.

3) **<u>VRAI</u>**. $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=-6\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AB}=-9\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc colinéaires.

4) **<u>VRAI</u>**. ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et CDEF est un parallélogramme donc $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DC}$. Comme $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont tous deux égaux à $\overrightarrow{DC}$, ils sont égaux entre eux, ce qui prouve que ABFE est un parallélogramme.

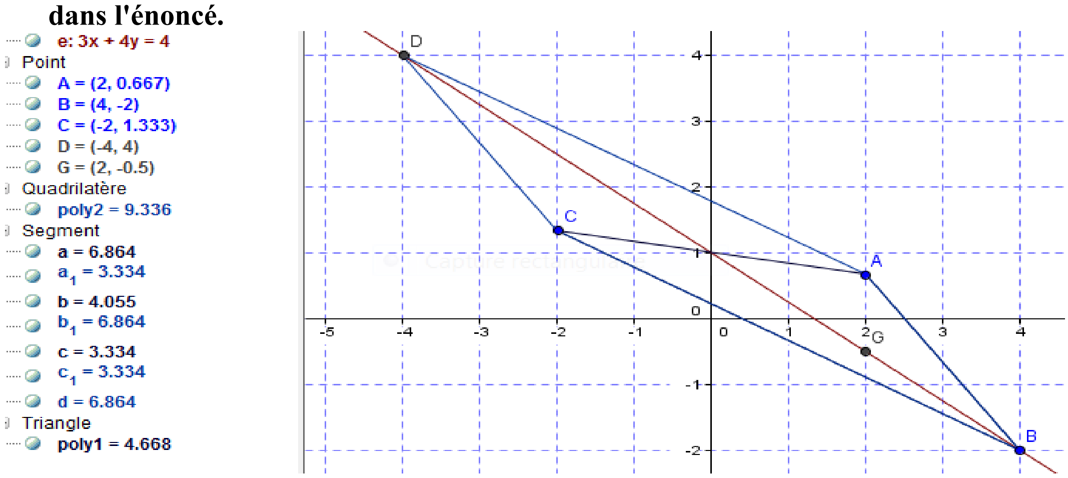
Exercice 2.

1) $\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{JC}$ 2) $\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{DH}$ 3) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{BJ}$

Exercice 3.

<u>Partie I</u> : Étude d'un cas particulier. Dans un repère du plan les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $A\left(2;\frac{2}{3}\right)$, $B(4;-2)$ et $C\left(-2;\frac{4}{3}\right)$.

1) Faire une figure que vous compléterez au fur et à mesure que de nouveaux points apparaissent dans l'énoncé.



Attention ABCD est différent de ABDC : Cela donne deux parallélogrammes différents !

2) Déterminer par le calcul les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_C-x_D\\y_C-y_D\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4-2\\-2-2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-x_D\\4/3-y_D\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2=-2-x_D\\-2-2/3=4/3-y_D\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=-4\\y_D=4/3+2/3+2=6/3+2=4\end{cases}$ $\boxed{D\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}}$

3) Déterminer par le calcul les coordonnées du point G défini par $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

<u>Méthode 1</u> : $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_A-x_G\\y_A-y_G\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}x_B-x_G\\y_B-y_G\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_C-x_G\\y_C-y_G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_A-x_G+2(x_B-x_G)+x_C-x_G=0\\y_A-y_G+2(y_B-y_G)+y_C-y_G=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}2-x_G+2(4-x_G)-2-x_G=0\\2/3-y_G+2(-2-y_G)+4/3-y_G=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-4x_G+8=0\\-4y_G+\frac{2}{3}-4+\frac{4}{3}=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}4x_G=8\\4y_G=\frac{6}{3}-4=2-4=-2\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=2\\y_G=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}\end{cases}$ $\boxed{G\begin{pmatrix}2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$

Méthode 2 : En introduisant l'origine dans tous les vecteurs par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+2(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_G\\y_G\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_C\\y_C\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{G\begin{pmatrix}2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$$

4) c) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$.

$$\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}x_D-x_B\\y_D-y_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4-4\\4+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}\qquad\boxed{\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}}$$

d) D'après votre figure, que peut-on conjecture pour les points B, G et D ? Démontrer cette conjecture.

Conjecture : Les points B, G et D sont alignés.

Preuve : $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}2-4\\-0,5+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1,5\end{pmatrix}$ Donc $4\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}$ càd que $4\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BD}$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et comme ils ont un point en commun, <u>les points B, G et D sont alignés</u>.

<u>Partie II</u> : Cas général

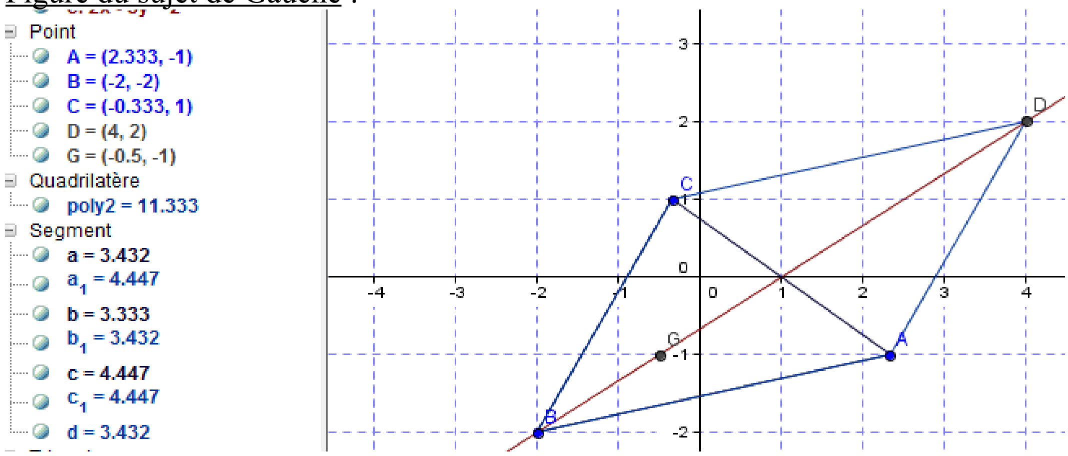
5) Par la relation de Chasles, en introduisant le point B dans tous les vecteurs où il ne figure pas encore :

$$\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}\overset{(i)}{\Leftrightarrow}4\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{DB}$$

(i) par la règle du parallélogramme, puisque l'on sait que ABCD est un parallélogramme.

Finalement, $4\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{DB}$ (*qu'on peut réécrire* $4\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BD}$ *, on retrouve donc le cas particulier*) donc les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et comme ils ont un point en commun, les points B, G et D sont alignés.

<u>Figure du sujet de Gauche</u> :



SG2, SD4 :

DS09 207

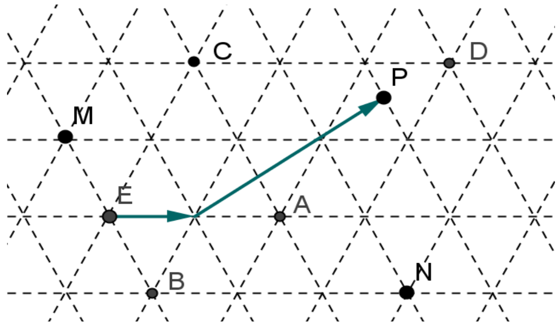
4

Exe **1**		**7**	Vrai-faux
5	2		transl
	1		milieu
	2		colin
	2		2 parall
Exe **2**		**4**	Tri equi
1	1		
2	1,5		
3	1,5		
Exe **3**		**9**	Align
1	1,5		Figure
2	2		coord D
3	2		coord G
4a	1		coord BD
4b	2,5		Align
5a	1,5		Bonus
		20	

CORRIGÉ du D.S. n°10 : *Vecteurs* Sujet D | 2^{nde} 4

Exercice 1. *Graphiquement*

Placez sans justification les points demandés sur la figure ci-contre dans laquelle tous les petits triangles en pointillés sont identiques.



1) Placer M tel que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}$ par le règle du parallélogramme.

2) Placer N tel que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DN}$.

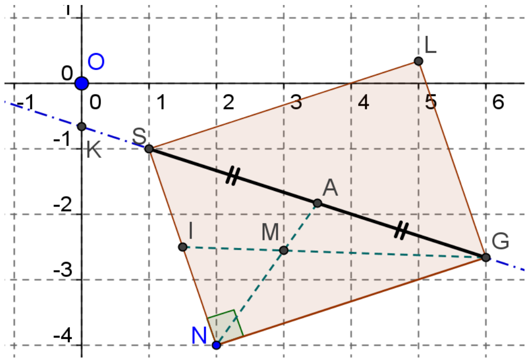
3) Placer P tel que $\overrightarrow{EP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2.

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}$ par la relation de Chasles, d'où $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{FC}=3\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AB}=8\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc colinéaires ce qui prouve que droites (EF) et (AB) sont parallèles.

Exercice 3.

1) Figure :



2) L est image de S par la translation de vecteur $\overrightarrow{NG}$ signifie que $\overrightarrow{SL}=\overrightarrow{NG}$ c'est à dire $\begin{pmatrix} x_L-1\\ y_L+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-2\\ -\frac{8}{3}+4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} x_L=6-2+1\\ y_L=-\frac{8}{3}+4-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_L=5\\ y_L=-\frac{8}{3}+\frac{9}{3}=\frac{1}{3}\end{cases}$

$\boxed{L\left(5;\frac{1}{3}\right)}$.

3) L est image de S par la translation de vecteur $\overrightarrow{NG}$ signifie que $\overrightarrow{SL}=\overrightarrow{NG}$ donc SNGL est un parallélogramme. A est le milieu de la diagonale [SG].

Comme les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, A est aussi le milieu de l'autre diagonale, qui est [LN]. Les points L, A et N sont donc alignés.

4) ● On sait déjà que SNGL est un parallélogramme et au vu de la figure, on conjecture que c'est un rectangle. Montrons qu'il a un angle droit par la réciproque du théorème de Pythagore :

$GL^2=(5-6)^2+\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{3}\right)^2=(-1)^2+(3)^2=10$; $SL^2=(5-1)^2+\left(\frac{1}{3}+1\right)^2=(4)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2=16+\frac{16}{9}$ et

$GS^2=(1-6)^2+\left(-1+\frac{8}{3}\right)^2=(-5)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2=25+\frac{25}{9}$.

On a donc $SL^2+GL^2=10+16+\frac{16}{9}=26+\frac{16}{9}=25+1+\frac{16}{9}=25+\frac{9}{9}+\frac{16}{9}=25+\frac{25}{9}=GS^2$. Par la réciproque du théorème de Pythagore $SL^2+GL^2=GS^2$ montre que l'angle $\widehat{GLS}$ est droit.

● SNGL est donc un parallélogramme qui possède un angle droit, c'est donc un rectangle.

5) K appartient à l'axe des ordonnées donc $x_K=0$. S, G et K sont alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{SK}$ et $\overrightarrow{SG}$ sont colinéaires. Or $\overrightarrow{SK}\begin{pmatrix} x_K-1\\ y_K+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ y_K+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SG}\begin{pmatrix}6-1\\ -\frac{8}{3}+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -\frac{5}{3}\end{pmatrix}$. En comparant les abscisses on voit que $x_{\overrightarrow{SG}}=-5x_{\overrightarrow{SK}}$. Le coefficient de colinéarité est donc -5 d'où $y_{\overrightarrow{SG}}=-5y_{\overrightarrow{SK}}$ c'est à dire $-5(y_K+1)=-\frac{5}{3}$ c'est à dire, en divisant les deux membres par -5, $y_K+1=\frac{1}{3}$ c'est à dire $y_K=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$.

$\boxed{K\left(0\ ;-\frac{2}{3}\right)}$

6) a)

$$\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MG}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1-x_M\\-1-y_K\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2-x_M\\-4-y_K\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6-x_M\\-\frac{8}{3}-y_M\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x_M+9=0\\-3y_M-5-\frac{8}{3}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_M=9\\3y_M=-5-\frac{8}{3}=-\frac{23}{3}\end{cases}$$

Les coordonnées de M sont donc $\boxed{M\left(3\ ;-\frac{23}{9}\right)}$.

b) I est le milieu de [SN] donc $x_I=\frac{x_S+x_N}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$ et $y_I=\frac{y_S+y_N}{2}=\frac{-1-4}{2}=-\frac{5}{2}$. $\boxed{I\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)}$

Montrons que I, M et G sont alignés : Pour cela on va montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires. Or $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}3-\frac{3}{2}\\-\frac{23}{9}+\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{46}{18}+\frac{45}{18}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{18}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MG}\begin{pmatrix}6-3\\-\frac{8}{3}+\frac{23}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-\frac{16}{9}+\frac{23}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\\frac{1}{9}\end{pmatrix}$. $-\frac{3}{2}\times2=-3$ et $-\frac{1}{18}\times(-2)=\frac{1}{9}$ donc $-2\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{MG}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires donc <u>I, M et G sont alignés</u>.