SUJET G

D.S. n°9 : Vecteurs — 2^{nde} 7

Vendredi 26 avril 2013, 55 min. Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : + ± − Technique : + ± − Raisonnement : + ± −	Signature des parents : Vu	Note : $\overline{}$ 20

Il faut toujours prouver vos affirmations (sauf mention contraire de l'énoncé) et, lorsque vous justifiez vos réponses, la propriété employée doit apparaître clairement.

/7

Exercice 1.

Cet exercice est un Vrai-Faux. Dire pour chacune des propositions suivantes si elle est vraie ou si elle est fausse. Chaque réponse devra être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point par contre toute trace de recherche même non concluante sera prise en compte dans l'évaluation.

1) Si $\overrightarrow{PC}=5\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{RC}=-6\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

2) Si $AI=IB$ alors I est le milieu de $[AB]$.

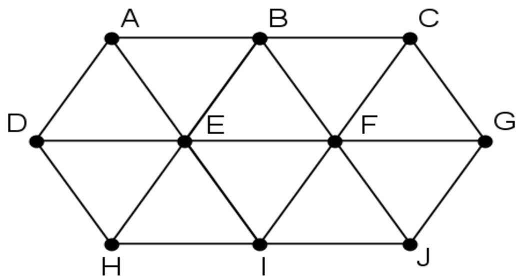
3) Si MNOP et OPQR sont tous les deux des parallélogrammes alors MNRQ est lui aussi un parallélogramme.

4) Si M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors les segments [MB] et [AM'] ont le même milieu.

/4

Exercice 2. *Graphiquement*

La figure ci-dessous est un assemblage de triangles équilatéraux. Compléter sans justifications les phrases ci-dessous en remplaçant les pointillés par une lettre.



1) $\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{JF}=\overrightarrow{H\ldots}$

2) $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{E\ldots}$

3) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{H\ldots}$

/9

Exercice 3.

<u>Partie I</u> : Étude d'un cas particulier. Dans un repère du plan les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $A\left(\frac{7}{3};-1\right)$, $B(-2;-2)$ et $C\left(-\frac{1}{3};1\right)$.

/1,5 **1)** Faire une figure que vous compléterez au fur et à mesure que de nouveaux points apparaissent dans l'énoncé.

/2 **2)** Déterminer par le calcul les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

/2 **3)** Déterminer par le calcul les coordonnées du point G défini par $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

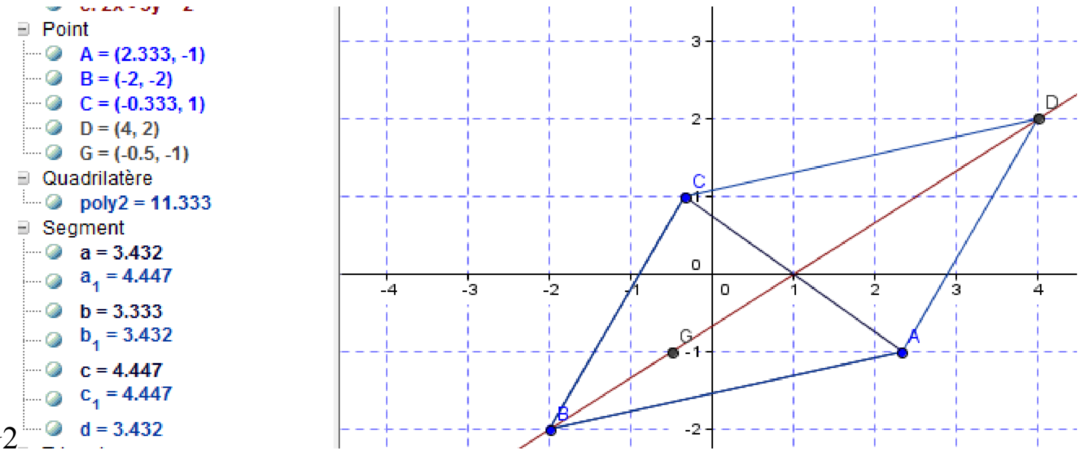
/1 **4) a)** Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$.

/2,5 **b)** D'après votre figure, que peut-on conjecturer pour les points B, G et D ? Démontrer cette conjecture.

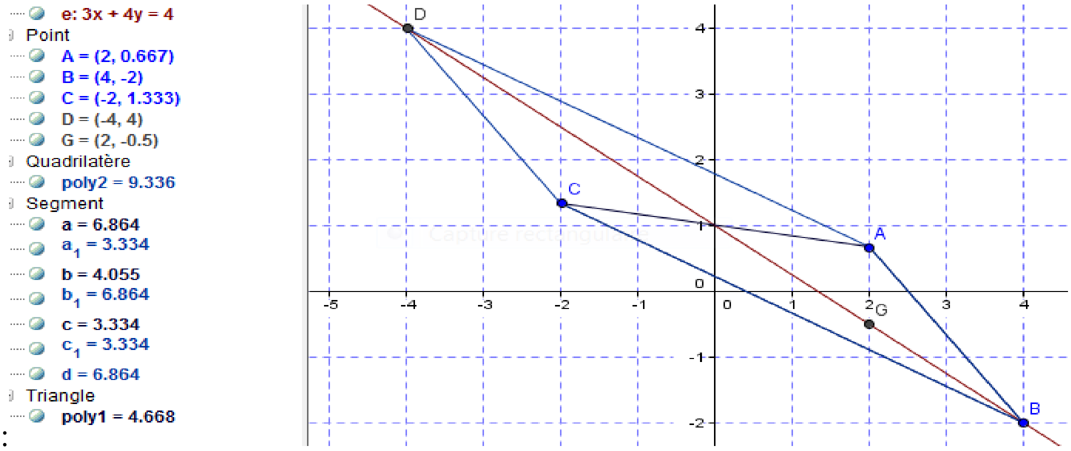
<u>Partie II</u> : Cas général

/1,5 **5)** *Bonus* : Démontrer que, avec G et D définis comme ci-dessus, cette conjecture est valable quelles que soient les coordonnées de A, B et C.

SG2



SD4 :



Rappel : Calculatrices INTERDITES.

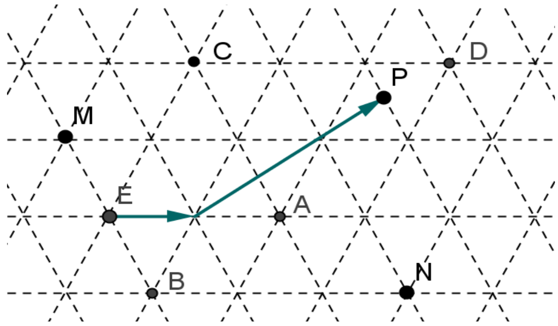
DS09 207

4			
Exe **1**		**7**	Vrai-faux
5	2		transl
	1		milieu
	2		colin
	2		2 parall
Exe **2**		**4**	Tri equi
1	1		
2	1,5		
3	1,5		
Exe **3**		**9**	Align
1	1,5		Figure
2	2		coord D
3	2		coord G
4a	1		coord BD
4b	2,5		Align
5a	1,5		Bonus
		20	

CORRIGÉ du D.S. n°10 : *Vecteurs* Sujet D | 2^{nde} 4

Exercice 1. *Graphiquement*

Placez sans justification les points demandés sur la figure ci-contre dans laquelle tous les petits triangles en pointillés sont identiques.



1) Placer M tel que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}$ par le règle du parallélogramme.

2) Placer N tel que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DN}$.

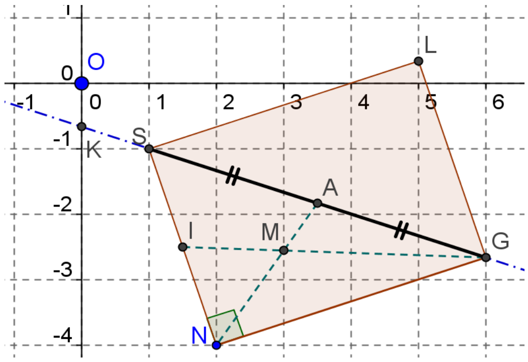
3) Placer P tel que $\overrightarrow{EP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2.

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}$ par la relation de Chasles, d'où $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{FC}=3\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AB}=8\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc colinéaires ce qui prouve que droites (EF) et (AB) sont parallèles.

Exercice 3.

1) Figure :



2) L est image de S par la translation de vecteur $\overrightarrow{NG}$ signifie que $\overrightarrow{SL}=\overrightarrow{NG}$ c'est à dire $\begin{pmatrix} x_L-1 \\ y_L+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-2 \\ -\frac{8}{3}+4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L=6-2+1 \\ y_L=-\frac{8}{3}+4-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L=5 \\ y_L=-\frac{8}{3}+\frac{9}{3}=\frac{1}{3} \end{cases}$

$\boxed{L\left(5;\frac{1}{3}\right)}$.

3) L est image de S par la translation de vecteur $\overrightarrow{NG}$ signifie que $\overrightarrow{SL}=\overrightarrow{NG}$ donc SNGL est un parallélogramme. A est le milieu de la diagonale [SG].

Comme les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, A est aussi le milieu de l'autre diagonale, qui est [LN]. <u>Les points L, A et N sont donc alignés</u>.

4) ● On sait déjà que SNGL est un parallélogramme et au vu de la figure, on conjecture que c'est un rectangle. Montrons qu'il a un angle droit par la réciproque du théorème de Pythagore :

$GL^2=(5-6)^2+\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{3}\right)^2=(-1)^2+(3)^2=10$; $SL^2=(5-1)^2+\left(\frac{1}{3}+1\right)^2=(4)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2=16+\frac{16}{9}$ et

$GS^2=(1-6)^2+\left(-1+\frac{8}{3}\right)^2=(-5)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2=25+\frac{25}{9}$.

On a donc $SL^2+GL^2=10+16+\frac{16}{9}=26+\frac{16}{9}=25+1+\frac{16}{9}=25+\frac{9}{9}+\frac{16}{9}=25+\frac{25}{9}=GS^2$. Par la réciproque du théorème de Pythagore $SL^2+GL^2=GS^2$ montre que l'angle $\widehat{GLS}$ est droit.

● SNGL est donc un <u>parallélogramme</u> qui possède un angle droit, c'est donc un <u>rectangle</u>.

5) K appartient à l'axe des ordonnées donc $x_K=0$. S, G et K sont alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{SK}$ et $\overrightarrow{SG}$ sont colinéaires. Or $\overrightarrow{SK}\begin{pmatrix} x_K-1 \\ y_K+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ y_K+1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SG}\begin{pmatrix} 6-1 \\ -\frac{8}{3}+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$. En comparant les abscisses on voit que $x_{\overrightarrow{SG}}=-5x_{\overrightarrow{SK}}$. Le coefficient de colinéarité est donc -5 d'où $y_{\overrightarrow{SG}}=-5y_{\overrightarrow{SK}}$ c'est à dire $-5(y_K+1)=-\frac{5}{3}$ c'est à dire, en divisant les deux membres par -5, $y_K+1=\frac{1}{3}$ c'est à dire $y_K=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$.

$\boxed{K\left(0\ ;-\frac{2}{3}\right)}$

6) a)

$$\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MG}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1-x_M\\-1-y_K\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2-x_M\\-4-y_K\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6-x_M\\-\frac{8}{3}-y_M\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x_M+9=0\\-3y_M-5-\frac{8}{3}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_M=9\\3y_M=-5-\frac{8}{3}=-\frac{23}{3}\end{cases}$$

Les coordonnées de M sont donc $\boxed{M\left(3\ ;-\frac{23}{9}\right)}$.

b) I est le milieu de [SN] donc $x_I=\frac{x_S+x_N}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$ et $y_I=\frac{y_S+y_N}{2}=\frac{-1-4}{2}=-\frac{5}{2}$. $\boxed{I\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)}$

Montrons que I, M et G sont alignés : Pour cela on va montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires. Or $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}3-\frac{3}{2}\\-\frac{23}{9}+\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{46}{18}+\frac{45}{18}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{18}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MG}\begin{pmatrix}6-3\\-\frac{8}{3}+\frac{23}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-\frac{16}{9}+\frac{23}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\\frac{1}{9}\end{pmatrix}$. $-\frac{3}{2}\times2=-3$ et $-\frac{1}{18}\times(-2)=\frac{1}{9}$ donc $-2\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{MG}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires donc <u>I, M et G sont alignés</u>.