SUJET D

D.S. n°10 : Bilan de fin d'année	2^{nde} 7

Vendredi 24 mai 2013, 2 heures, calculatrices autorisées. Ce sujet est à rendre avec la copie.
Coefficient 3 ou 6 : le coefficient le plus favorable au candidat s'applique.
Bonus de 2 points intégré puisque le total des points est de 22.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : + ± − Technique : + ± − Raisonnement : + ± −	Signature des parents : Vu	Note : /20

Il faut toujours prouver vos affirmations (sauf mention contraire de l'énoncé) et, lorsque vous justifiez vos réponses, la propriété employée doit apparaître clairement.

/5

Exercice 1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=16-(x+2)^2$.

1) Déterminer le tableau de variation de f sur son domaine de définition.

2) Donner le meilleur encadrement possible de $f(x)$ lorsque

a) $x\in[2\ ;4[$ **b)** $x\in]-4\ ;1[$

3) Donner le meilleur encadrement possible de $(f(x))^2$ lorsque $x\in[-3\ ;-2]$.

4) Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x)\leqslant 0$.

/3

Exercice 2.

1) Dessiner sur votre copie un cercle trigonométrique. On prendra 4 cm comme unité.

2) Placer sur ce cercle, à la règle et au compas (*pas de rapporteur* !), les réels $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$. *Laisser les traits de construction apparents.*

3) Donner sans justification les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

4) Expliquer comment on peut trouver grâce à la figure précédente les valeurs exactes de $\sin\left(\frac{106\pi}{3}\right)$ et $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$. *(Je sais que vos machines peuvent faire ce calcul, c'est donc avant tout la façon d'utiliser le cercle trigonométrique que cet exercice évalue.)*

/3

Exercice 3.

On annonce à Monsieur Millepromesses, un homme politique qui se présente aux prochaines élection contre Madame Parlévrai, qu'un sondage réalisé sur 400 personnes le crédite de 53% d'intentions de votes. Ravi, il appelle Harame sa directrice de campagne et lui propose de déboucher le champagne pour fêter sa future victoire. En effet dit-il, il est sûr d'être élu puisque qu'avec les 53% des voix prédits par le sondage, il est au-dessus du seuil fatidique des 50%. Sa directrice de campagne, qui elle a fait des mathématiques durant ses études, lui dit que ce n'est pas exactement comme cela que s'interprètent les résultats du sondage.

1) Expliquer précisément à Monsieur Millepromesses (qui n'y connaît rien en mathématiques) quel enseignement il peut tirer du sondage. *(Votre explication doit être formulée sans terme technique, dans un langage que quelqu'un que n'a pas fait de mathématiques peut comprendre. Elle doit faire apparaître « 95 % » et « intervalle ».)*

2) Sur combien de personne au minimum aurait dû porter le sondage pour qu'avec 53% d'intentions de votes Monsieur Millepromesses soit sûr d'obtenir plus de 50% des voix avec un niveau de confiance d'au moins 95% ? *Justifier avec soin les différentes étapes de la résolution de l'inéquation.*

/3

Exercice 4.

Parmi les 250 élèves inscrits à l'association sportive (AS) d'un lycée, 90 font partie de la section badminton, 120 sont inscrits à la section football et 50 sont inscrits à ces deux sections.

1) Calculer la probabilité qu'un élève choisi au hasard parmi les inscrits à l'AS soit inscrit à ces deux activités.

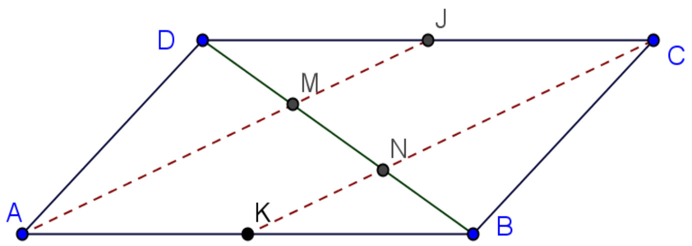
2) Calculer la probabilité qu'un élève choisi au hasard parmi les inscrits à l'AS soit inscrit à au moins une de ces deux activités.

3) Calculer la probabilité qu'un élève choisi au hasard parmi les inscrits à l'AS ne fasse ni badminton ni football.

/8

Exercice 5

ABCD est un parallélogramme, J est le milieu de [CD] et K est le milieu de [AB]. (AJ) coupe (BD) en M et (CK) coupe (BD) en N.



L'objectif de cet exercice est de montrer de deux façons différentes (et indépendantes l'une de l'autre) que les droites (AJ) et (KC) sont parallèles et que M et N partagent le segment [BD] en trois parties égales, c'est à dire que $DM=MN=NB$.

/5 **<u>Partie I</u> : Une solution analytique (=avec les coordonnées.)**

On choisit dans le plan le repère non orthonormé (A, B, D).

1) a) Donner sans justification les coordonnées de A, B, C et D dans ce repère.

b) Déterminer par le calcul les coordonnées de J et donner sans justification celles de K.

2) Prouvez que les droites (AJ) et (KC) sont parallèles.

3) a) Déterminer l'équation de la droite (BD).

b) Donner sans justification l'équation de la droite (AJ).

c) En déduire que M a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

d) Par une méthode similaire, déterminer les coordonnées de N. (*Si vous ne les trouvez pas, devinez-les grâce au dessin, admettez leur valeur et continuez*)

4) Prouvez $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.

/3 **<u>Partie II</u> : Une solution avec les configurations (pas de coordonnées).**

Les méthodes des deux parties sont indépendantes : On repart de zéro et on redémontre les deux résultats sans utiliser ce qui a été prouvé dans la Partie I.

1) Prouvez que $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{JC}$ *(Rappel : On n'utilise pas les coordonnées dans cette partie)*

2) En déduire que les droites (AJ) et (KC) sont parallèles.

3) En déduire que N est le milieu de [BM] et que M est le milieu de [DN].

4) En déduire que $DM=MN=NB$

DS10 207

Exercice	**1**		**5**		Fonctions
	1	1,25			
	2	0,5			
	2	0,5			
	3	1,25			
	4	1,5			
Exercice	**2**		**3**		Trigo
	1	0,25			
	2	1			
	3	0,25			
	4	1,5			
Exercice	**3**		**3**		Sondage
	1	1,5			
	2	1,5			
Exercice	**4**		**3**		Probas
		1,5	Diagramme		
	1	0,25			
	2	1			
	3	0,25			
Exercice	**5**		**8**		Parallelogramme
I	*1a*	0,25		**I**	5
	1b	0,5			
	2	0,75			
	3a	1			
	3b	0,5			
	3c	0,75			
	3d	0,5			
	4	0,75			
II	*1a*	1		**II**	3
	2a	0,5			
	3a	1			
	4a	0,5			
			22	**0**	

SUJET D

Corrigé

Exercice 1.

1) **VRAI**. Si M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{RS}$ alors $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{RS}$ donc MM'SR est un parallélogramme donc ses diagonales, qui sont les segments [MS] et [RM'], ont le même milieu.

2) **FAUX**. Rien n'impose à A, I et B d'être alignés. Si AIB est un triangle non aplati isocèle en I, alors $AI=IB$ et pourtant I n'est PAS le milieu de $[AB]$.

3) **VRAI**. $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=-6\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AB}=-9\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc colinéaires.

4) **VRAI**. ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et CDEF est un parallélogramme donc $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DC}$. Comme $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont tous deux égaux à $\overrightarrow{DC}$, ils sont égaux entre eux, ce qui prouve que ABFE est un parallélogramme.

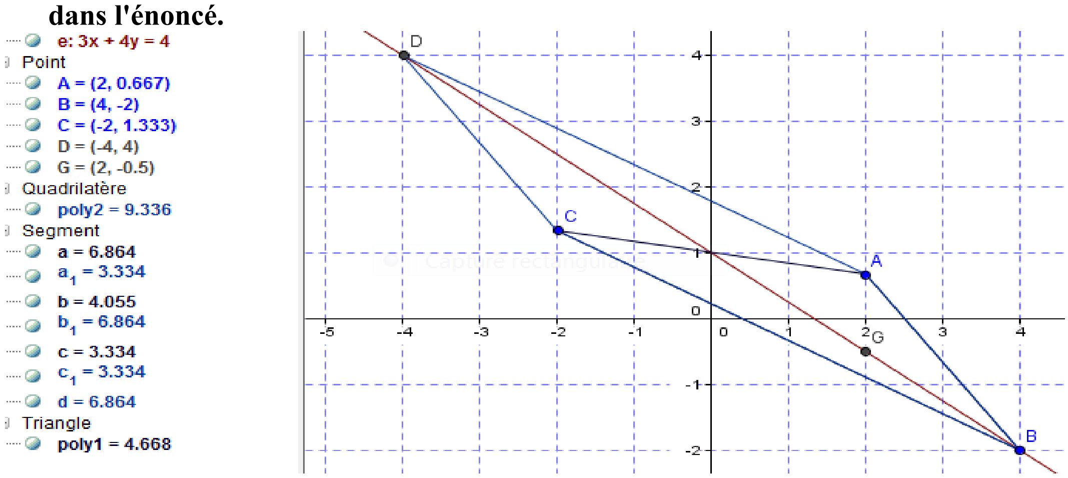
Exercice 2.

1) $\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{J\boldsymbol{C}}$ 2) $\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{D\boldsymbol{H}}$ 3) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{B\boldsymbol{J}}$

Exercice 3.

Partie I : Étude d'un cas particulier. Dans un repère du plan les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $A\left(2;\frac{2}{3}\right)$, $B(4;-2)$ et $C\left(-2;\frac{4}{3}\right)$.

1) **Faire une figure que vous compléterez au fur et à mesure que de nouveaux points apparaissent dans l'énoncé.**



Attention ABCD est différent de ABDC : Cela donne deux parallélogrammes différents !

2) **Déterminer par le calcul les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.**

ABCD est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_C-x_D\\y_C-y_D\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4-2\\-2-2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-x_D\\4/3-y_D\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2=-2-x_D\\-2-2/3=4/3-y_D\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=-4\\y_D=4/3+2/3+2=6/3+2=4\end{cases}\quad\boxed{D\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}}$

3) **Déterminer par le calcul les coordonnées du point G défini par $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.**

Méthode 1 : $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_A-x_G\\y_A-y_G\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}x_B-x_G\\y_B-y_G\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_C-x_G\\y_C-y_G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_A-x_G+2(x_B-x_G)+x_C-x_G=0\\y_A-y_G+2(y_B-y_G)+y_C-y_G=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}2-x_G+2(4-x_G)-2-x_G=0\\2/3-y_G+2(-2-y_G)+4/3-y_G=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-4x_G+8=0\\-4y_G+\frac{2}{3}-4+\frac{4}{3}=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}4x_G=8\\4y_G=\frac{6}{3}-4=2-4=-2\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=2\\y_G=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}\end{cases}\quad\boxed{G\begin{pmatrix}2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$

Méthode 2 : En introduisant l'origine dans tous les vecteurs par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+2(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_G\\y_G\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_C\\y_C\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$\boxed{G\begin{pmatrix}2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$

4) e) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$.

$$\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}x_D-x_B\\y_D-y_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4-4\\4+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}$$

$\boxed{\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}}$

f) D'après votre figure, que peut-on conjecture pour les points B, G et D ? Démontrer cette conjecture.

Conjecture : Les points B, G et D sont alignés.

Preuve : $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}2-4\\-0,5+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1,5\end{pmatrix}$ Donc $4\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}$ càd que $4\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BD}$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et comme ils ont un point en commun, <u>les points B, G et D sont alignés</u>.

<u>Partie II</u> : Cas général

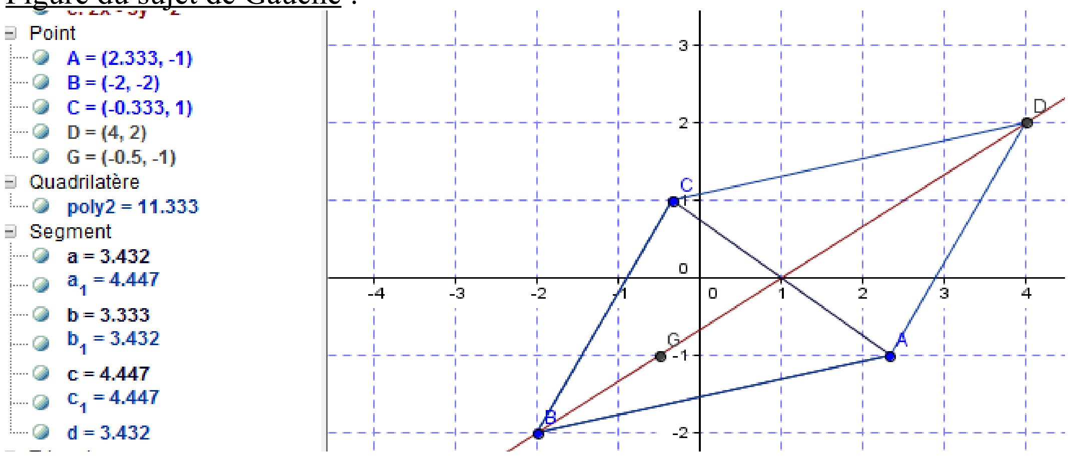
5) Par la relation de Chasles, en introduisant le point B dans tous les vecteurs où il ne figure pas encore :

$$\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}\overset{(i)}{\Leftrightarrow} 4\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{DB}$$

(i) par la règle du parallélogramme, puisque l'on sait que ABCD est un parallélogramme.

Finalement, $4\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{DB}$ (*qu'on peut réécrire* $4\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BD}$ *, on retrouve donc le cas particulier*) donc les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et comme ils ont un point en commun, les points B, G et D sont alignés.

<u>Figure du sujet de Gauche</u> :



SG2, SD4 :

DS09 207

4				
Exe	**1**		**7**	Vrai-faux
	5	2		transl
		1		milieu
		2		colin
		2		2 parall
Exe	**2**		**4**	Tri equi
	1	1		
	2	1,5		
	3	1,5		
Exe	**3**		**9**	Align
	1	1,5		Figure
	2	2		coord D
	3	2		coord G
	4a	1		coord BD
	4b	2,5		Align
	5a	1,5		Bonus
			20	