SUJET G

D.S. n°10 : Vecteurs	2^{nde} 4

<u>Calculatrices interdites</u>, 55 min. Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : + 0 − Technique : + 0 − Raisonnement : + 0 −	Signature des parents : Vu	Note : ―― **20**

• RAPPELS SUR LA FRAUDE AUX EXAMENS : Aucun échange de matériel ou d'informations n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.

En cas de similitudes dans les copies, les <u>deux élèves</u> concernés auront zéro : Laisser copier un camarade, c'est encourager la triche et accepter de pénaliser ceux qui ne trichent pas.

Toute fraude ou tentative de fraude donnera lieu à un rapport qui sera consigné dans le dossier scolaire des élèves concernés. En cas de triche avec récidive, en plus de ce rapport, une mention figurera dans le bulletin scolaire des élèves concernés.

• RAPPEL 2 : Il faut toujours prouver vos affirmations (sauf mention contraire de l'énoncé) et, lorsque vous justifiez vos réponses, la propriété employée doit apparaître clairement.

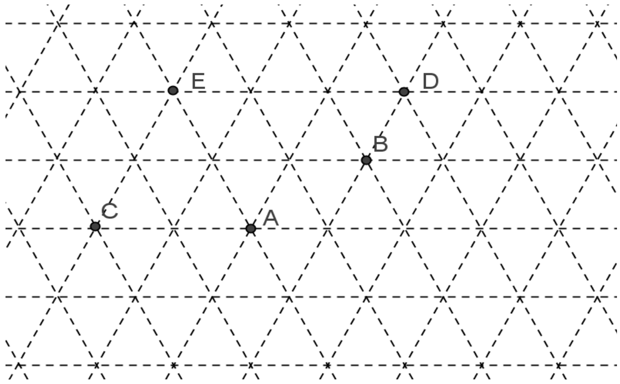
/4 **Exercice 1.** *Graphiquement*

Placez sans justification les points demandés sur la figure ci-contre dans laquelle tous les petits triangles en pointillés sont identiques.

1) Placer M tel que $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CM}$.

2) Placer N tel que $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AN}$.

3) Placer P tel que $\overrightarrow{BP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{ED}-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.



Rappel : Calculatrices INTERDITES.

/3 **Exercice 2.**

M, N, P , R et S sont des points tels que $\overrightarrow{PR}=7\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{SR}=-4\overrightarrow{MN}$. Sans utiliser de coordonnées, montrez que les droites (PS) et (MN) sont parallèles.

/13 **Exercice 3.**

Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, les points N, G et S ont pour coordonnées respectives $N(-2;\,1)$, $G\left(-6;-\dfrac{1}{3}\right)$ et $S(-1;\,-2)$.

/1 **1)** Faire une figure que vous compléterez au fur et à mesure que de nouveaux objets (points, droites...) apparaissent dans l'énoncé.

/1,5 **2)** Déterminer par le calcul les coordonnées de L, image de S par la translation de vecteur $\overrightarrow{NG}$.

/2 **3)** Soit A le milieu de [SG]. Montrez sans aucun calcul que L, A et N sont alignés.

/2 **4)** Quelle est la nature du quadrilatère SNGL ? *Soyez aussi précis(e) que possible.*

/2 **5)** (SG) coupe l'axe des ordonnées en K. Déterminer par le calcul les coordonnées de K.

/2 **6)** **a)** Soit M le point défini par $\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MG}=\vec{0}$. Déterminer par le calcul les coordonnées de M.

/2,5 **b)** Soit I le milieu de [SN]. Déterminer par le calcul les coordonnées de I puis montrez que I, M et G sont alignés.

CORRIGÉ du D.S. n°10 : *Vecteurs* Sujet G | 2nde 4

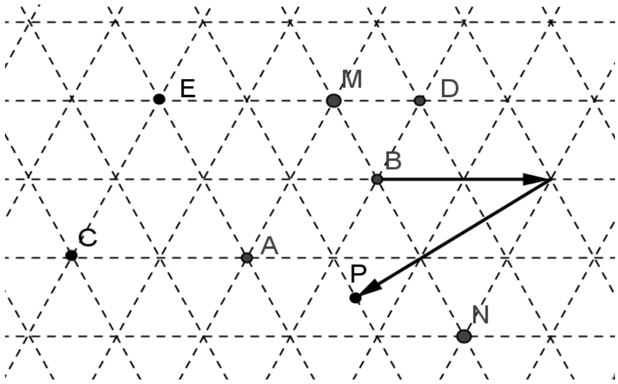
Exercice 1. *Graphiquement*

Placez sans justification les points demandés sur la figure ci-contre dans laquelle tous les petits triangles en pointillés sont identiques.

1) M est tel que $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CM}$ par la règle du parallélogramme.

2) N est tel que $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AN}$.

3) Placer P tel que $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{ED}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.



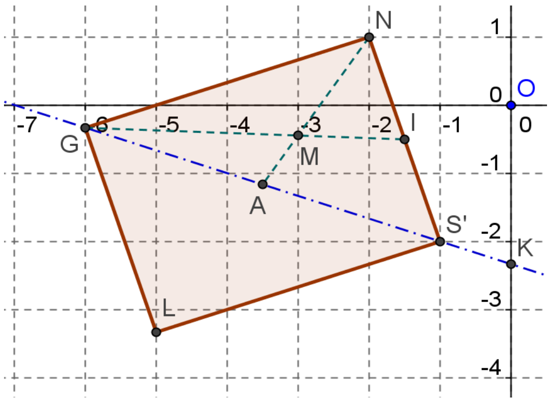
Exercice 2.

$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RS}$ par la relation de Chasles, d'où $\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{SR}=7\overrightarrow{MN}+4\overrightarrow{MN}=11\overrightarrow{MN}$. Les vecteurs $\overrightarrow{PS}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont donc colinéaires ce qui prouve que droites (PS) et (MN) sont parallèles.

Exercice 3.

Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, les points N, G et S ont pour coordonnées respectives $N(-2;1), G\left(-6;-\frac{1}{3}\right)$ et $S(-1;-2)$.

1) Figure :



2) L est image de S par la translation de vecteur $\overrightarrow{NG}$ signifie que $\overrightarrow{SL}=\overrightarrow{NG}$ c'est à dire $\begin{pmatrix} x_L+1 \\ y_L+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6+2 \\ -\frac{1}{3}-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L=-6+2-1 \\ y_L=-\frac{1}{3}-1-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L=-5 \\ y_L=-\frac{1}{3}-\frac{9}{3}=-\frac{10}{3} \end{cases}$

$\boxed{L\left(-5;-\frac{10}{3}\right)}$.

3) L est image de S par la translation de vecteur $\overrightarrow{NG}$ signifie que $\overrightarrow{SL}=\overrightarrow{NG}$ donc SNGL est un parallélogramme. A est le milieu de la diagonale [SG].

Comme les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, A est aussi le milieu de l'autre diagonale, qui est [LN]. <u>Les points L, A et N sont donc alignés</u>.

4) ● On sait déjà que SNGL est un parallélogramme et au vu de la figure, on conjecture que c'est un rectangle. Montrons qu'il a un angle droit par la réciproque du théorème de Pythagore :

$GL^2=(-5+6)^2+\left(-\frac{10}{3}+\frac{1}{3}\right)^2=(1)^2+(-3)^2=10$; $SL^2=(-5+1)^2+\left(-\frac{10}{3}+2\right)^2=(-4)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2=16+\frac{16}{9}$ et

$GS^2=(-1+6)^2+\left(-2+\frac{1}{3}\right)^2=(5)^2+\left(-\frac{5}{3}\right)^2=25+\frac{25}{9}$.

On a donc $SL^2+GL^2=10+16+\frac{16}{9}=26+\frac{16}{9}=25+1+\frac{16}{9}=25+\frac{9}{9}+\frac{16}{9}=25+\frac{25}{9}=GS^2$. Par la réciproque du théorème de Pythagore $SL^2+GL^2=GS^2$ montre que l'angle $\widehat{GLS}$ est droit.

● SNGL est donc un <u>parallélogramme</u> qui possède un angle droit, c'est donc un <u>rectangle</u>.

5) K appartient à l'axe des ordonnées donc $x_K=0$. S, G et K sont alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{SK}$ et $\overrightarrow{SG}$ sont colinéaires. Or $\overrightarrow{SK}\begin{pmatrix} x_K+1 \\ y_K+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ y_K+2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SG}\begin{pmatrix} -6+1 \\ -\frac{1}{3}+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$. En comparant les abscisses on voit que $x_{\overrightarrow{SG}}=-5\,x_{\overrightarrow{SK}}$.

Le coefficient de colinéarité est donc -5 d'où $y_{\overrightarrow{SG}}=-5y_{\overrightarrow{SK}}$ c'est à dire $-5(y_K+2)=\frac{5}{3}$ c'est à dire, en divisant les deux membres par -5, $y_K+2=-\frac{1}{3}$ c'est à dire $y_K=-\frac{1}{3}-2=-\frac{7}{3}$. $\boxed{K\left(0\ ;-\frac{7}{3}\right)}$

6) a)

$$\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MG}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1-x_M\\-2-y_K\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2-x_M\\1-y_K\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6-x_M\\\frac{1}{3}-y_M\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x_M-9=0\\-3y_M-1-\frac{1}{3}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_M=-9\\3y_M=-1-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}\end{cases}.$$

Les coordonnées de M sont donc $\boxed{M\left(-3\ ;-\frac{4}{9}\right)}$.

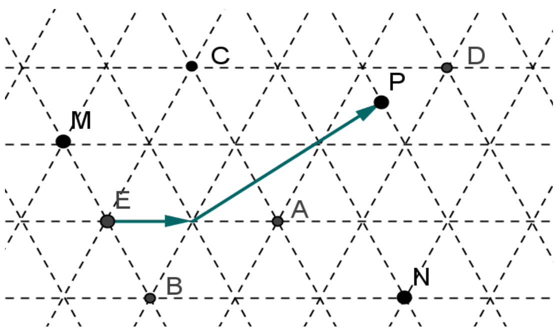
b) I est le milieu de [SN] donc $x_I=\frac{x_S+x_N}{2}=\frac{-1-2}{2}=-\frac{3}{2}$ et $y_I=\frac{y_S+y_N}{2}=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$. $\boxed{I\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)}$

Montrons que I, M et G sont alignés : Pour cela on va montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires. Or $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}-3+\frac{3}{2}\\-\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-\frac{8}{18}+\frac{9}{18}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{1}{18}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MG}\begin{pmatrix}-6+3\\\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\\frac{3}{9}+\frac{4}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\\frac{1}{9}\end{pmatrix}$. $-\frac{3}{2}\times2=-3$ et $\frac{1}{18}\times2=\frac{1}{9}$ donc $2\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{MG}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires donc <u>I, M et G sont alignés</u>.

CORRIGÉ du D.S. n°10 : *Vecteurs* Sujet D	2^{nde} 4

Exercice 1. *Graphiquement*

Placez sans justification les points demandés sur la figure ci-contre dans laquelle tous les petits triangles en pointillés sont identiques.



1) Placer M tel que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}$ par le règle du parallélogramme.

2) Placer N tel que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DN}$.

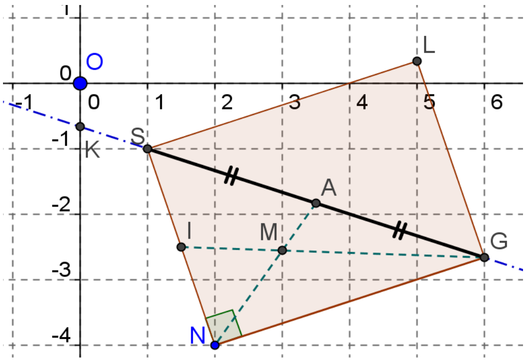
3) Placer P tel que $\overrightarrow{EP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2.

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}$ par la relation de Chasles, d'où $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{FC}=3\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AB}=8\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc colinéaires ce qui prouve que droites (EF) et (AB) sont parallèles.

Exercice 3.

1) Figure :



2) L est image de S par la translation de vecteur $\overrightarrow{NG}$ signifie que $\overrightarrow{SL}=\overrightarrow{NG}$ c'est à dire

$$\begin{pmatrix} x_L-1 \\ y_L+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-2 \\ -\frac{8}{3}+4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L=6-2+1 \\ y_L=-\frac{8}{3}+4-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L=5 \\ y_L=-\frac{8}{3}+\frac{9}{3}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$\boxed{L\left(5;\frac{1}{3}\right)}$.

3) L est image de S par la translation de vecteur $\overrightarrow{NG}$ signifie que $\overrightarrow{SL}=\overrightarrow{NG}$ donc SNGL est un parallélogramme. A est le milieu de la diagonale [SG].

Comme les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, A est aussi le milieu de l'autre diagonale, qui est [LN]. <u>Les points L, A et N sont donc alignés</u>.

4) ● On sait déjà que SNGL est un parallélogramme et au vu de la figure, on conjecture que c'est un rectangle. Montrons qu'il a un angle droit par la réciproque du théorème de Pythagore :

$GL^2=(5-6)^2+\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{3}\right)^2=(-1)^2+(3)^2=10$; $SL^2=(5-1)^2+\left(\frac{1}{3}+1\right)^2=(4)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2=16+\frac{16}{9}$ et

$GS^2=(1-6)^2+\left(-1+\frac{8}{3}\right)^2=(-5)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2=25+\frac{25}{9}$.

On a donc $SL^2+GL^2=10+16+\frac{16}{9}=26+\frac{16}{9}=25+1+\frac{16}{9}=25+\frac{9}{9}+\frac{16}{9}=25+\frac{25}{9}=GS^2$. Par la réciproque du théorème de Pythagore $SL^2+GL^2=GS^2$ montre que l'angle $\widehat{GLS}$ est droit.

● SNGL est donc un <u>parallélogramme</u> qui possède un angle droit, c'est donc un <u>rectangle</u>.

5) K appartient à l'axe des ordonnées donc $x_K=0$. S, G et K sont alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{SK}$ et $\overrightarrow{SG}$ sont colinéaires. Or $\overrightarrow{SK}\begin{pmatrix} x_K-1 \\ y_K+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ y_K+1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SG}\begin{pmatrix} 6-1 \\ -\frac{8}{3}+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$. En comparant les abscisses on voit que $x_{\overrightarrow{SG}}=-5x_{\overrightarrow{SK}}$.

Le coefficient de colinéarité est donc -5 d'où $y_{\overrightarrow{SG}}=-5y_{\overrightarrow{SK}}$ c'est à dire $-5(y_K+1)=-\frac{5}{3}$ c'est à dire, en divisant les deux membres par -5, $y_K+1=\frac{1}{3}$ c'est à dire $y_K=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$. $\boxed{K\left(0;-\frac{2}{3}\right)}$

6) a)

$$\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MG}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 1-x_M \\ -1-y_K \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2-x_M \\ -4-y_K \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6-x_M \\ -\frac{8}{3}-y_M \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} -3x_M+9=0 \\ -3y_M-5-\frac{8}{3}=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3x_M=9 \\ 3y_M=-5-\frac{8}{3}=-\frac{23}{3} \end{cases}$$

Les coordonnées de M sont donc $\boxed{M\left(3;-\frac{23}{9}\right)}$.

b) I est le milieu de [SN] donc $x_I=\frac{x_S+x_N}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$ et $y_I=\frac{y_S+y_N}{2}=\frac{-1-4}{2}=-\frac{5}{2}$. $\boxed{I\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)}$

Montrons que I, M et G sont alignés : Pour cela on va montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires. Or

$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} 3-\frac{3}{2} \\ -\frac{23}{9}+\frac{5}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{46}{18}+\frac{45}{18} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{18} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MG}\begin{pmatrix} 6-3 \\ -\frac{8}{3}+\frac{23}{9} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{16}{9}+\frac{23}{9} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$. $-\frac{3}{2}\times 2=-3$ et $-\frac{1}{18}\times(-2)=\frac{1}{9}$

donc $-2\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{MG}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires donc <u>I, M et G sont alignés</u>.