Devoir surveillé du Jeudi 20 septembre 2012

Durée de l'épreuve : 1 heure 50 minutes. L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Le sujet doit être remis avec votre copie (cf. exercice n°5)
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies

NOM : …........................

PRENOM : …................

Exercice n°1 *[5 points]*

On considère dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$,

le cercle $\left(\Gamma\right)$ de centre O et de rayon 1.

Soit *A* le point de coordonnées (1 ;0) et *A'* le point de coordonnées (-1 ;0)

1) Par tout point *H* du segment *[AA']* distinct de *A* et de *A'*, on mène la perpendiculaire $\left(\Delta\right)$ à la droite *(AA')*.
La droite $\left(\Delta\right)$ coupe le cercle $\left(\Gamma\right)$ en *M* et *M'*.
On pose $\overline{OH}=x$ (c'est-à-dire $x=OH$ si *H* est à droite de *O* et $x=-OH$ si *H* est à gauche de *O*)
Calculer en fonction de *x* l'aire du triangle *AMM'*.
On rappelle l'équation du cercle de centre Ω *et de rayon r :* $\left(x-x_{\Omega}\right)^2+\left(y-y_{\Omega}\right)^2=r^2$

2) Soit *f* la fonction numérique définie sur [-1 ;1] par $f(x)=\left(1-x\right)\sqrt{1-x^2}$
b) Justifier que *f* est dérivable sur]-1 ;1[et calculer *f'(x)*.
c) Étudier le signe de *f'(x)* et dresser le tableau de variations de *f*.
s3) Quelle est la nature du triangle AMM' d'aire maximale ? Vous justifierez soigneusement votre réponse.

Exercice n°2 *[6 points]*

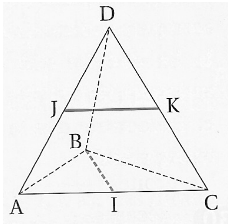
On considère les fonctions numériques *f* et *g* définies par : $f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)$ et $g(x)=2x^3+x^2-1$
1) Montrer que pour tout $x\neq 0$, les nombres $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
2) Étudier les variations de *g* sur $\mathbb{R}$ puis en déduire que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ un unique solution α avec $0<\alpha<1$. Préciser le signe de g suivant les valeurs de *x*.
3) Dresser le tableau de variations de la fonction *f*.
4) On désigne par C_f la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthonormé (unité 3 cm), par *I*, le point de C_f d'abscisse -1 et par *J* le point de C_f d'abscisse 1. Vérifier que la droite *(IJ)* est tangente en *J* à C_f .

Inspiré du sujet de France Métropolitaine 2007

Exercice n°3 *Restitution Organisée de Connaissances.* *[2 points]*

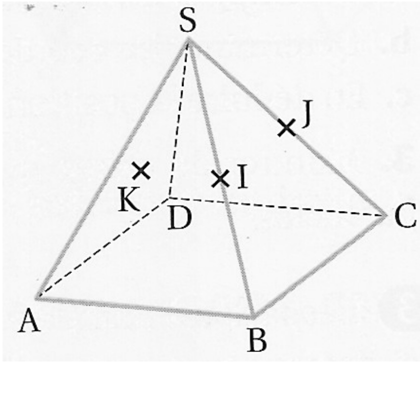
La proposition suivante est-elle vraie : « Une fonction continue sur un intervalle I est dérivable sur cet intervalle. » Justifiez votre réponse.

Exercice n°4 *[3,5 points]*



ABCD est un tétraèdre régulier. *I, J* et *K* sont les milieux respectifs de *[AC], [AD] et [DC]*.
1) Montrer que les droites *(BI)* et *(JK)* sont orthogonales.
2) Montrer que la droite *(JK)* est orthogonales au plan *(BDI)*.
3) Que peut on dire des plans *(BDI)* et *(BJK) ?*

Exercice n°5 *[3,5 points]*



SABCD est une pyramide à base carrée. I et J sont les milieux respectifs de [BS] et [CS]. K est un point de la face ADS.
1) Montrer que les plans (IJK) et (ADS) se coupent suivant une droite parallèle à (AD).
2) En déduire la trace de la section de la pyramide par le plan (IJK). Vous la tracerez directement sur cette feuille sans oublier de la joindre à votre copie)
3) Quelle est la nature du quadrilatère ainsi obtenu ?