SUJET D

D.S. n°8 : Logarithme *(avec un soupçon d'intégrales, un zeste d'algorithmique et un brin de suites)*	TS1

Jeudi 17 avril 2014, 55 min, **Calculatrices autorisées**. Ce sujet est à rendre avec la copie.

Nom : . . . . Prénom :	Communication : ☺ 😐 ☹ Technique : ☺ 😐 ☹ Raisonnement : ☺ 😐 ☹	Note : $\overline{}$ **20**

Partie A

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

1) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

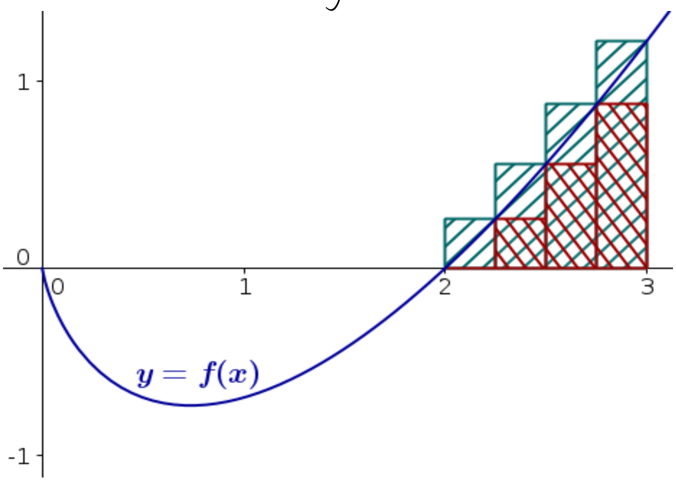
2) On appelle f' la fonction dérivée de f sur $]0;+\infty[$. Montrer que $f'(x)=\ln\left(\frac{x}{2}\right)+1$.

3) Déterminer les variations de f sur $]0;+\infty[$.

Partie B

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal. Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x=2$ et $x=3$. On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$. (*voir la figure ci-dessous*).

Figure



Algorithme

Variables
 k et n sont des entiers naturels
 U, V sont des nombres réels
Initialisation
 U prend la valeur 0
 V prend la valeur 0
 n prend la valeur 4
Traitement
Pour k allant de 0 à $n-1$
 Affecter à U la valeur $U+\frac{1}{n}f\left(2+\frac{k}{n}\right)$
 Affecter à V la valeur $V+\frac{1}{n}f\left(2+\frac{k+1}{n}\right)$
Fin pour
Affichage
 Afficher U
 Afficher V

1) a) Que représentent U et V sur le graphique précédent ?

b) Quelles sont les valeurs U et V affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près) ?

c) En déduire un encadrement de $\mathscr{A}$.

2) Soient les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier n non nul par :

$$U_n=\frac{1}{n}\left[f(2)+f\left(2+\frac{1}{n}\right)+f\left(2+\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(2+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$V_n=\frac{1}{n}\left[f\left(2+\frac{1}{n}\right)+f\left(2+\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(2+\frac{n-1}{n}\right)+f(3)\right]$$

On admettra que, pour tout n entier naturel non nul, $U_n\leqslant\mathscr{A}\leqslant V_n$.

a) Trouver le plus petit entier n tel que $V_n-U_n<0{,}1$.

b) Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de $\mathscr{A}$ d'amplitude strictement inférieure à 0,01 ?

Corrigé Calédonie_mars 2014_ex3 modifié

Partie A

1) Limites de f en 0 et en $+\infty$.

$f(x)=x\,ln\left(\frac{x}{2}\right)=x\,ln(x)-x\,ln2$. D'après le cours, on sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\,ln(x)=0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=0+0=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\frac{x}{2}\right)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\,ln\left(\frac{x}{2}\right)=+\infty \text{ (par produit) donc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

2) On appelle f' la fonction **dérivée** de f sur $]0;+\infty[$. La fonction f est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables: $f'(x)=1\times ln\left(\frac{x}{2}\right)+x\times\frac{1/2}{x/2}=ln\left(\frac{x}{2}\right)+x\times\frac{1}{x}=ln\left(\frac{x}{2}\right)+1$.

3) Variations de f sur $]0;+\infty[$. On étudie le signe de $f'(x)$ sur $]0\ ;+\infty[$:

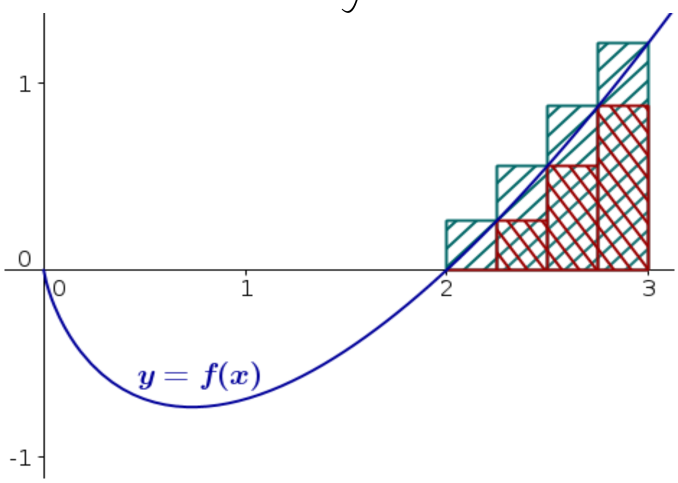
$f'(x)>0\Leftrightarrow ln\left(\frac{x}{2}\right)+1>0\Leftrightarrow ln\left(\frac{x}{2}\right)>-1 \overset{(i)}{\Leftrightarrow} \frac{x}{2}>e^{-1}\Leftrightarrow x>2e^{-1}$ *(i) en composant par la fonction exp qui est croissante*

Donc: La fonction f est strictement décroissante sur $]0\ ;2e^{-1}]$; *(on a $2e^{-1}\approx 0{,}74$ ce qui est cohérent avec le dessin)*
la fonction f est strictement croissante sur $[2e^{-1};+\infty[$.

Remarque : On vérifie tous nos résultats grâce au graphique ci-dessous donné dans l'énoncé.

Partie B

Figure



Algorithme

```
Variables
    k et n sont des entiers naturels
    U, V sont des nombres réels
Initialisation
    U prend la valeur 0
    V prend la valeur 0
    n prend la valeur 4
Traitement
Pour k allant de 0 à n−1
    Affecter à U la valeur U + (1/n) f(2 + k/n)
    Affecter à V la valeur V + (1/n) f(2 + (k+1)/n)
Fin pour
Affichage
    Afficher U
    Afficher V
```

1) a) Que représentent U et V sur le graphique précédent ? Sur la figure ci-dessus, le nombre U représente la somme des aires des rectangles inférieurs (en rouge); cette somme minore l'aire sous la courbe. Le nombre V représente la somme des aires des rectangles supérieurs (en vert); cette somme majore l'aire sous la courbe.

b) Quelles sont les valeurs U et V affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près) ?
On fait tourner l'algorithme ci-dessous:

Variables	k	U	V	n
Initialisation		0	0	4
Traitement	0	$0+\frac{1}{4}f(2)=0$	$0+\frac{1}{4}[f(2{,}25)]\approx 0{,}06625$	4
	1	$\frac{1}{4}[f(2)+f(2{,}25)]\approx 0{,}06625$	$\frac{1}{4}[f(2{,}25)+f(2{,}5)]\approx 0{,}20572$	4
	2	$\frac{1}{4}[f(2)+f(2{,}25)+f(2{,}5)]\approx 0{,}20572$	$\frac{1}{4}[f(2{,}25)+f(2{,}5)+f(2{,}75)]\approx 0{,}42466$	4
	3	$\frac{1}{4}[f(2)+f(2{,}25)+f(2{,}5)+f(2{,}75)]\approx 0{,}42466$	$\frac{1}{4}[f(2{,}25)+f(2{,}5)+f(2{,}75)+f(3)]\approx ,728875$	4
Affichage	On affiche U arrondi par défaut à 10^{-4} près : $\boxed{U\approx 0{,}4246}$			
	On affiche V arrondi par excès à 10^{-4} près : $\boxed{V\approx 0{,}7288}$			

Remarques :

1. *Comme le dit sûrement tout le temps votre prof de physique, on arrondit seulement à la fin sinon les erreurs d'arrondi s'accumulent.*
2. *On peut faire un tableau de valeurs à la calculatrice avec un pas de 0,25 pour obtenir les valeurs à ajouter. En mettant le curseur sur une case de ce tableau, on peut faire afficher plus de décimales.*
3. *f(2)=0 voilà pourquoi certaines valeurs réapparaissent : Ne les calculez pas deux fois.*
4. *On doit voir tourner l'algorithme : Ne mettez pas uniquement le résultat sinon les points partent à la poubelle avec votre brouillon...*

c) On peut donc en déduire que $\boxed{0{,}4246<\mathscr{A}<0{,}7288}$.

2) a) Trouver le plus petit entier n tel que $V_n-U_n<0{,}1$. Sachant que $U_n=\frac{1}{n}\left[f(2)+f\left(2+\frac{1}{n}\right)+f\left(2+\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(2+\frac{n-1}{n}\right)\right]$ et que $V_n=\frac{1}{n}\left[f\left(2+\frac{1}{n}\right)+f\left(2+\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(2+\frac{n-1}{n}\right)+f(3)\right]$, on peut dire que $V_n-U_n=\frac{1}{n}(f(3)-f(2))=\frac{3ln(3/2)-2ln(1)}{n}=\frac{3ln(1{,}5)}{n}$. $V_n-U_n<0{,}1\Leftrightarrow\frac{3ln(1{,}5)}{n}<0{,}1\Leftrightarrow 3ln(1{,}5)<0{,}1\,n\Leftrightarrow n>\frac{3ln(1{,}5)}{0{,}1}$

Or $\frac{3ln(1{,}5)}{0{,}1}\approx 12{,}16$ donc le plus petit entier n tel que V_n-U_n soit inférieur à 0,1 est 13.

Vérification: $V_{12}-U_{12}=\frac{f(3)-f(2)}{12}\approx 0{,}101>0{,}1$ *et* $V_{13}-U_{13}=\frac{f(3)-f(2)}{13}\approx 0{,}094<0{,}1$

b) **Première méthode (pour ceux qui aiment les algorithmes mais pas les calculs) :** Pour obtenir un encadrement de $\mathscr{A}$ d'amplitude inférieure à 0,01 dans l'algorithme, on ajoute une boucle TANT QUE (voir ci-contre).

Idée : Pour une valeur donnée de n, on calcule U_n et V_n (*c'est le rôle de la boucle POUR*) puis on regarde si l'écart entre ces deux nombres est supérieur ou égale à 0,01. Si c'est le cas, on recommence avec la valeur suivante de n. (*c'est le rôle de la boucle TANT QUE*).

Deuxième méthode (pour ceux qui aiment les calculs mais pas les algorithmes) :
On calcule la plus petite valeur de n qui permet d'obtenir un encadrement de $\mathscr{A}$ d'amplitude inférieure à 0,01 (mêmes calculs que précédemment) :

$V_n-U_n<0{,}01\Leftrightarrow\frac{3ln(1{,}5)}{n}<0{,}01\Leftrightarrow 3ln(1{,}5)<0{,}01\,n\Leftrightarrow n>\frac{3ln(1{,}5)}{0{,}01}$

Or $\frac{3ln(1{,}5)}{0{,}01}\approx 121{,}6$ donc le plus petit entier n tel que V_n-U_n soit inférieur à 0,1 est 122. On remplace 4 par 122 dans l'algorithme précédent.

Algorithme

```
Variables
    k et n sont des entiers naturels
    U , V sont des nombres réels
Initialisation
    U prend la valeur 0
    V prend la valeur 0
    n prend la valeur 1
Traitement
TANT_QUE  V − U ⩾ 0,01
    U prend la valeur 0
    V prend la valeur 0
    POUR k allant de 0 à n−1
        Affecter à U la valeur U + (1/n) f(2 + k/n)
        Affecter à V la valeur V + (1/n) f(2 + (k+1)/n)
    Fin POUR
    Affecter à n la valeur n+1
Fin TANT QUE
Affichage
    Afficher U
    Afficher V
```