NOM **TS1-2-5**

DEVOIR SURVEILLÉ 8

durée 4 heures Calculatrice autorisée

Dans ce devoir toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Sauf indication contraire, toute réponse devra être justifiée.

Un formulaire format A4 est autorisé et est à rendre avec la copie

EXERCICE 1 (3,5 points)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par : $u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n$

PARTIE A

1. On considère l'algorithme ci-contre :
   Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre n=4.
2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur n.
3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondi à 10^{-3} .

```
variables :       i et n sont des entiers naturels
                  u est un nombre réel
entrée :          demander à l'utilisateur la valeur de n
initialisation :  affecter à u la valeur 0
traitement :      pour i variant de 1 à n
                        Affecter à u la valeur u+1/i
sortie :          afficher u
```

n	5	6	7	8	9
u_n	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632

À l'aide du tableau ci-dessus formuler une conjecture à propos du sens de variation de la suite.

PARTIE B

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Démontrer que la fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$.

3. a. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[1;+\infty[$.

3. b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

EXERCICE 2 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On considère les points $A(0;4;1)$, $B(1;3;0)$, $C(2;-1;-2)$ et $D(7;-1;4)$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-1;3)$.

2. a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
2. b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
2. d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
3. Soit P_1 le plan d'équation $x+y+z=0$ et P_2 le plan d'équation $x+4y+2=0$.

3. a. Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

3. b. Vérifier que la droite d, intersection des plans P_1 et P_2, a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=-4t-2 \\ y=t \qquad\qquad t\in\mathbb{R} \\ z=3t+2 \end{cases}.$$

3. c. Quelle est la position relative de la droite d par rapport au plan (ABC) ?

EXERCICE 3 (3,5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité.
On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives a = 1 et b =-1.
On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M d'affixe z définie par : $z'=\dfrac{z-1}{z+1}$.

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.
1. a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, $(z'-1)(z+1)=-2$.

1. b. En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1.
Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
2. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.
3. Soit le point P d'affixe $p=-2+i\sqrt{3}$.

3. a. Déterminer la forme exponentielle de p +1.
3. b. En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application f. Illustrer par une figure.

EXERCICE 4 (5 points)

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$.

On note (C) la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère du plan.

1. a. Étudier la limite de *f* en 0.

1. b. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$? En déduire la limite de la fonction *f* en $+\infty$.

1. c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe (C).

2. a. On note *f'* la fonction dérivée de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Démontrer que, pour tout réel *x* de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$.

2. b. Résoudre sur l'intervalle $]0;+\infty[$, l'inéquation $-1-2\ln x>0$.

2. c. Dresser le tableau de variation complet de la fonction *f*.

3. Démontrer que la courbe (C) a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

4. Pour tout entier $n\geq 1$, on note I_n l'aire exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x=\dfrac{1}{e}$ et $x=n$.

4. a. Montrer que $0\leq I_2\leq e-\dfrac{1}{2}$.

4. b. Montrer que la fonction F définie par $F(x)=\dfrac{-2-\ln x}{x}$ est une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4. c. Calculer I_n en fonction de *n*.

4. d. Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

EXERCICE 5 (3 points)

Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse (on justifiera avec soin la réponse).

Proposition 1 : La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.

Proposition 2 : Il y a une infinité d'entiers naturels pour lesquels $25\times 0{,}1^n\leq 0{,}04\times 0{,}10001^n$

Proposition 3 : On se place dans le plan complexe muni du repère $(O;\vec{u};\vec{v})$. On pose $a=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, $b=\dfrac{1}{6}e^{\frac{-2i\pi}{3}}$ et $c=-3e^{\frac{i\pi}{12}}$. On considère le point M d'affixe ab et le point N d'affixe c^7. Les points O, M et N sont alignés.