Dernier D.S. de 4h : Le bac est à nos portes... **CORRIGÉ**, *basé sur celui de l'APMEP, merci à Denis Verges !*	**TS 1, 2 et 5**

Samedi 14 février 2013, 4h, **Calculatrice et formulaire de une page A4 autorisés**.

Exercice 1. *Métropole, 21 juin 2012 modifié, Exo 3*

PARTIE A

1) Les différentes variables de l'algorithme prennent successivement les valeurs suivantes :

☟ $u+1/i=u+\frac{1}{i}\neq\frac{u+1}{i}$

n	4	4	4	4	4
i		1	2	3	4
u	0	$0+1=1$	$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$	$\frac{11}{6}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}$, valeur qui s'affiche

Lorsque l'utilisateur entre $n=4$ l'algorithme affiche $\frac{25}{12}$.

2) Remplacer la sortie par : « Afficher $u-\ln n$. » [*pas de « u_n » dans l'algorithme ! Personnellement je rajouterais bien aussi un « FinPour » qui aurait dû être là depuis le début.*]

3) *On peut conjecturer* que la suite est décroissante. [*ou « la suite semble ... » mais PAS « La suites EST décroissante. »*]

PARTIE B

1) $f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}\overset{(i)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+0}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=\lim\limits_{X\to1}\ln X=0$. On a par ailleurs $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$, donc finalement par somme de limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$.

● Méthode du corrigé de l'APMEP : Comme sur $[1;+\infty[$, $x+1>0$, et $\frac{x}{x+1}>0$ la fonction f est la somme de deux fonctions dérivables sur $[1;+\infty[$ et sur cet intervalle : $f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=\frac{x}{x+1}$. Or

$$u'(x)=\frac{1\times(x+1)-x\times1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2} \text{ donc } f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}}=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x(x+1)}=\frac{-x+x+1}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x(x+1)^2}.$$

● Autre méthode (meilleure, non ?) : Sur $[1;+\infty[$, $x>0$ et $x+1>0$ donc $f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln(x)-\ln(x+1)$ d'où $f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ et on met au même dénominateur pour retrouver $f'(x)=\frac{1}{x(x+1)^2}$.

Remarque : Il est indispensable de vérifier que a>0 et b> 0 (et de le dire!) avant d'écrire que ln(ab) =ln a +ln b . Par exemple 6=(-3)(-2) et pourtant $\ln 6\neq\ln(-3)+\ln(-2)$ puisque les deux derniers termes n'existent pas.

Pour $x\geqslant1$, la dérivée est strictement positive, donc la fonction est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.
Or une fonction strictement croissante sur $[1;+\infty[$ qui a une limite négative ou nulle en $+\infty$ est strictement négative sur $[1;+\infty[$

$\boxed{\text{On en déduit que } f(x)<0 \text{ sur } [1;+\infty[.}$

Tableau de variations de f

x	1	$+\infty$
signe de f '(x)	$+$	
Variations de f	$f(1)<0$ $\nearrow$	0

2)

$$u_{n+1}-u_n=\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)\right]-\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right]=\frac{1}{n+1}+\ln n-\ln(n+1)=\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=f(n).$$

On a vu que pour $x\geqslant1$, $f(x)<0$, donc $u_{n+1}-u_n=f(n)<0$ montre que $u_{n+1}<u_n$, ce qui signifie que la suite (u_n) est strictement <u>décroissante</u>.

Remarque : On pouvait aussi dire que pour $x\geqslant1$, la dérivée est positive, donc la fonction est croissante sur $[1;+\infty[$ (sans les « strictement »). Or une fonction croissante sur $[1;+\infty[$ qui a une limite négative ou nulle en $+\infty$ est négative sur $[1;+\infty[$. On en déduit que $f(x)\leqslant0$ sur $[1;+\infty[$. À la question suivante cela permet de déduire que $u_{n+1}\leqslant u_n$ et donc que la suite (u_n) est décroissante (au sens large = pas strictement). Cette deuxième version est plus simple mais elle donne une conclusion un peu moins précise.