EXERCICES : Moivre-Laplace, Échantillonnage et Estimation TS

Gestion du document : pour masquer les CORRigés et les exercices En Préparation : CORR=V et EP=V

Sources : M. Reisse-Barde, M. Mugnier et divers manuels.

Exercice 1. Révision du programme de première S.

Partie 1 : Loi binomiale

Une urne contient 60% de boules rouges.

On prélève au hasard et avec remise 100 boules dans l'urne. On désigne par X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules rouges observées dans un tel prélèvement.

1) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Donner son espérance et la valeur arrondie à 10^{-4} près de son écart type.

2) A l'aide de la calculatrice donner les valeurs arrondie à 10^{-4} près de :

$$p(X=60) \quad ; \quad p(X\leq 49) \quad ; \quad p(X\leq 50) \quad ; \quad p(X\geq 69) \quad ; \quad p(X\geq 70)$$

Partie 2 : Des intervalles de fluctuation

1) Exprimer en fonction de X la variable aléatoire F qui associe à chaque prélèvement de 100 boules la fréquence de boules rouges observée.

2) Donner l'intervalle de fluctuation I vu en classe de seconde puis, en utilisant les résultats de la première partie calculer la probabilité que F prenne ses valeurs dans I.

3) Utiliser les résultats de la première partie pour déterminer le plus petit intervalle J de la forme $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ où a et b sont des entiers naturels, tel que $p\left(F<\frac{a}{n}\right)\leq 0{,}025$ et $p\left(F>\frac{b}{n}\right)\leq 0{,}025$.

Que peut on en déduire pour $p\left(\frac{a}{n}\leq F\leq\frac{b}{n}\right)$?

Exercice 2. *Un exemple de l'utilisation d'un intervalle de confiance*

Un maraîcher achète un lot de semences de tomates pour produire ses plants de tomate. Il lui reste des semences de l'année passée dont il doit contrôler le taux de germination pour pouvoir les utiliser avec les autres. En effet, des taux de germination trop différents provoquent des trous dans les plates-bandes de production, ce qui génère un coût de manutention plus élevé car il faut enlever les pots non germés avant de les conditionner. Il faut donc comparer les taux de germination des semences des deux années.

Une stratégie consiste à calculer et à comparer les intervalles de confiance des taux de germination) qui sont des proportions) des plants de l'année et de l'année précédente. Si les deux intervalles ne se recoupent pas, on peut conclure à une différence de taux de germination entre les semences des deux origines.

Pour faire cette comparaison, le maraîcher prélève aléatoirement dans les semences de l'année un échantillon de 200 graines qu'il met à germer. Il constate que 185 graines germent.

Il prélève ensuite, aléatoirement dans les semences de l'année précédente, un échantillon de 200 graines qu'il met à germer. Il constate que 150 grains germent.

1) Déterminer un intervalle de confiance, au niveau 95 %, du taux de germination p_a du lot des semences de l'année.

2) Déterminer un intervalle de confiance, au niveau 95 %, du taux de germination p_b du lot des semences de l'année précédente.

3) Conclure.

Remarques :

Il est intéressant de noter que, sans connaître p_a et p_b, on dispose d'une méthode pour décider si au niveau de confiance 95 % que, si les intervalles de confiance sont disjoints, alors p_a et p_b sont différents.

Il existe d'autre méthodes d'estimation, mais qu'elle que soit la méthode utilisée, si elle est issue d'un échantillonnage aléatoire, la décision sera toujours entachée d'un risque d'erreur. Les méthodes utilisées assurent seulement la maîtrise de certains risques de se tromper.

Exercice 3.

On fait pousser 40 plants de courgettes avec nitrates et 40 sans nitrate. Au bout de 4 jours, le pourcentage de germination est de 45% avec nitrate et 31% sans nitrate.
Peut-on dire que les courgettes germent significativement mieux en présence de nitrate ?
Coup de pouce : Voir l'exercice précédent.

Exercice 4.

On considère un théâtre d'une contenance de 1200 places. On estime que la probabilité qu'un spectateur ayant réservé se désiste est de 0,1 et que les désistements se décident indépendamment les uns des autres. La direction du théâtre souhaite déterminer le nombre maximal de réservations à accepter pour une représentation de sorte que la probabilité de pouvoir accueillir tous les spectateurs se présentant au guichet et ayant une réservation en poche soit supérieure ou égale à 0,975.
On note n le nombre de réservations acceptées par la compagnie et X_n le nombre de spectateurs se présentant pour la représentation.

1) Donner la loi suivie par X_n ainsi que son espérance et sa variance puis, en utilisant le théorème de Moivre-Laplace, montrer que n doit vérifier : $0{,}9n+0{,}588\sqrt{n}-1200\leqslant 0$.

2) Que peut conclure la direction du théâtre ?

Exercice 5. *Un exemple de prise de décision à l'aide d'un intervalle de fluctuation*

Les enfants sont dits prématurés lorsque la durée de la grossesse est inférieure ou égale à 259 jours. La proportion de ces naissances est de 6% *(c'est la valeur de p, ici connue)*.
Des chercheurs suggèrent que les femmes ayant eu un travail pénible pendant leur grossesse sont plus susceptibles que les autres d'avoir un enfant prématuré. Ils décident de réaliser une enquête sur un échantillon aléatoire de 400 naissances *(c'est la valeur de n)* correspondant à des femmes ayant eu pendant leur grossesse un travail pénible.
Ils décident a priori que si la proportion d'enfants nés prématurés dans cet échantillon est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 alors leur hypothèse sera acceptée.

1) Le nombre d'enfants prématurés dans l'échantillon est de 50. Quelle est leur conclusion ?

2) Leur conclusion reste-elle valable si l'on s'intéresse maintenant à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,99 ?

3) Quelle était la probabilité d'obtenir une fréquence supérieure ou égale à 50 sur 400 pour un échantillon de femmes choisies au hasard?

Exercice 6. *R.O.C.* On considère l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F_n au seuil de 95% ; $I_n=\left[p-1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

1) Prouver que, pour tout $p\in[0\,;1]$, $p(1-p)\leq\dfrac{1}{4}$.

2) En déduire que I_n est inclus dans l'intervalle de fluctuation "simplifié" vu en seconde $J_n=\left[p-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$

Exercice 7.

En France, 3% de la population a le groupe sanguin AB.
Dans le village *Loinlaba*, 10 personnes sur 200 ont le groupe sanguin AB.
Peut-on dire, au risque de 95%, que la population de ce village présente une anomalie?

Exercice 8. Histoire vraie

En avril 2002 le candidat Jean-Marie Le Pen a surpris tout le monde en battant Lionel Jospin au premier tour des élections présidentielles en France. Une semaine avant le premier tour, un sondage réalisé auprès de 1000 personnes donnait 14% d'intentions de vote pour J-M Le Pen et 18% pour L. Jospin. Tout le monde s'attendait donc à ce que Jospin aille au second tour (contre Jacques Chirac).

1) a) Les conditions d'application du théorème de l'intervalle de confiance sont-elles réunies ?

b) Un résultat en faveur de J-M Le Pen était-il envisageable au vu des intervalles de confiance ?

2) Les résultats du premier tour ont donné 16,86% de voix pour J-M Le Pen et 16,18% pour L. Jospin. Faut-il remettre en cause les sondages ?

❍ Exercice 9. Effet d'une campagne de promotion

Le département marketing d'une grande société française de vente par correspondance propose lors de sa campagne de soldes un tarif réduit à ses clients sur certains produits proposés au catalogue. L'ingénieur statisticien du département marketing affirme que la proportion des clients qui acceptent d'acheter un produit à tarif réduit lors de ses campagnes de soldes est de 45 %.

1) Calculer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de clients qui vont acheter un produit à tarif réduit lors d'une campagne de promotion dans un échantillon de 500 clients issus du fichier clients.

2) Une étude réalisée auprès de 500 clients montre que 47 % des clients de l'échantillon répondent favorablement à la proposition d'achat de produits en soldes.

Que peut-on conclure quant à l'affirmation de l'ingénieur ?

❍ Exercice 10.

Dans la réserve indienne d'Aamjiwnaag, située au Canada, à proximité d'industries chimiques, entre 1999 et 2003 sont nés 132 enfants dont 42 garçons. Dans le Canada tout entier, la proportion de bébés garçons parmi l'ensemble des bébés est de 0,51.

Peut-on suspecter l'industrie chimique d'avoir eu une influence sur la proportion de garçons à la naissance et si oui, avec quel risque d'erreur ?

❍ Exercice 11. Algues toxiques

Dans un pays, 10 % des plages étaient atteintes par des algues toxiques. On a modifié le processus de rejets chimiques : on admet que le nouveau processus de rejet, très différent du précédent, pourrait modifier cette proportion.
On prend un échantillon aléatoire de 150 prélèvements, on constate que 18 présentent des traces d'algues toxiques. Peut-on penser que le nouveau traitement a un impact sur le pourcentage de plages polluées ?

❍ Exercice 12. Parcelles polluées

Pour analyser l'effet d'un polluant sur l'environnement, on procède par prélèvement aléatoire d'échantillons (randomisation des surfaces). On tire un échantillon de taille 100 et on constate que 11 parcelles présentent des traces de polluant. Le service communication se réjouit et affirme que la proportion de 12 % n'est pas atteinte. Une association s'élève en faux et affirme au contraire qu'on peut penser que l'hypothèse de 17 % qu'elle avance depuis longtemps n'est pas contredite.
Sous la pression des habitants, la municipalité demande au service statistique de définir une procédure permettant d'affirmer

- qu'on peut raisonnablement penser que la proportion de parcelles polluées est 12% ;
- que cette proportion de 17% est déraisonnable.

Que proposez vous?

❍ Exercice 13. Smartphones

Un industriel fabrique des smartphones. Pour contrôler la qualité de la production, il en teste 200 : 92% fonctionnent correctement. Que peut-on conclure pour l'ensemble de la production?
Durant 6 mois, l'entreprise de smartphones travaille à améliorer la qualité de sa production. Un nouvel échantillon de 200 smartphones est prélevé : 97% fonctionnent correctement.
Est-il raisonnable de penser que la production s'est améliorée?

❍ Exercice 14. Ampoules à économie d'énergie

La proportion d'ampoules à économie d'énergie non-conformes dans la production d'une entreprise est p = 0,07. L'entreprise souhaite pouvoir «garantir» qu'environ 95% des lots d'ampoules qu'elle fournit contiennent entre 6% et 8% d'ampoules non-conformes.
Quelle est la taille du lot à prendre pour répondre à cette contrainte?

❍ Exercice 15. Odyssée 19 p 444

❍ Exercice 16. Transmath 36 p 428

❍ Exercice 17. WIMS

http://wims.auto.u-psud.fr/wims/wims.cgi?module=H6/probability/oefprobtes.fr