Nom : . . . .   Prénom : . . . .

TICE, Geogebra
Estimer l'aire sous une courbe par la méthode de Monte-Carlo

T S

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$. Le but de ce problème est de déterminer un encadrement de $I=\int_{-5}^{5} f(x)dx$ par la méthode de Monte-Carlo. *(On prépare le terrain pour* $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}$ *)*

Partie 1: Réduction du problème

1) Observer $\mathscr{C}_f$, conjecturer un axe de symétrie puis prouver votre conjecture.

2) En déduire qu'il suffit de calculer $J=\int_0^5 f(x)dx$ pour connaître I. En effet, I = ...

3) Établir le tableau de variations de *f*.

Partie 2 : La méthode de Monte-Carlo

Soit *E* l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $0\le x\le 5$ et $0\le y\le f(x)$.
Soit *R* le rectangle constitué de l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $0\le x\le 5$ et $0\le y\le 1$.

4) Sur un même dessin, tracer à main levée R et la restriction de f à $[0;5]$. Hachurer l'aire égale à J : C'est l'aire de . . . .

L'idée de la méthode de Monte-Carlo *: Pour déterminer l'aire d'une surface E incluse dans une surface d'aire connue (un rectangle R par exemple) il suffit de placer un grand nombre de points de manière aléatoire dans le rectangle et de regarder la proportion de points qui tombent dans E.*
Par exemple, si les 3/4 des points tombent dans E, c'est que l'aire de E représente environ les 3/4 de l'aire de R. Comme on sait calculer l'aire de R, le tour est joué !
Bien sûr, plus il y a de points, meilleure est l'approximation de l'aire de E.

5) Écrire un algorithme qui, en entrée demande un entier naturel *n*, qui choisit n points au hasard dans le rectangle *R* et qui, en sortie, donne la fréquence sur ces *n* points de ceux qui se trouvent dans *E*.
Programmer cet algorithme sous ALGOBOX.
Avec n = 1 000 000, une valeur approchée de I est . . . .

6) Dans cette question on évalue l'incertitude sur le résultat obtenu.
a) Donner un encadrement de la probabilité qu'un point choisit au hasard dans le rectangle appartienne à l'ensemble *E*. (Souvenirs de seconde, voir ci-dessous..)
b) En déduire un encadrement de *I*.
Remarque : Il ne s'agit plus alors d'une conjecture mais d'une démonstration rigoureuse malgré l'utilisation de l'outil informatique.

Un peu de théorie, rappels de seconde

- Soit p la proportion réelle dans la population totale = la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population ait la caractéristique à laquelle on s'intéresse.
- Soit f la fréquence observée de cette caractéristique dans l'échantillon.

	Échantillonnage ***p connue*** Utilisation : On regarde si la valeur observée pour f est « raisonnable » *(Pour voir s'il y a discrimination conter les femmes dans une entreprise, pour voir si un jury a vraiment été choisi au hasard...etc)*	**Estimation** ***p inconnue***, Utilisation : On estime p au moyen de f *(Estimer la proportion p de gens qui vont voter pour un candidat à partir des résultats d'un sondage...etc))*
En seconde	Si $n\geqslant 25$ et $0{,}2\leqslant p\leqslant 0{,}8$, alors pour 95% des échantillons $f\in\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ *Intervalle de fluctuation* ↥	Si $n\geqslant 25$ et $0{,}2\leqslant f\leqslant 0{,}8$, alors pour 95% des échantillons $p\in\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ *Intervalle de confiance* ↥
En TS	On aura bientôt un meilleur résultat....suspense !	Même résultat qu'en seconde

Sources : Ce document reprend des idées d'un TD De M. Reiss-Barde