Exercices sur les groupes *Groupes et sous-groupes*	**TS :** Préparation aux mathématiques du supérieur

exercice 1

On considère les applications suivantes de $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ dans lui-même:

$f_1 : x \to x$; $f_2 : x \to 1-x$; $f_3 : x \to \dfrac{1}{1-x}$; $f_4 : x \to \dfrac{1}{x}$; $f_5 : x \to \dfrac{x}{x-1}$; $f_6 : x \to \dfrac{x-1}{x}$

1) Montrer que $G=\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ est un groupe pour la composition des applications.

2) Le groupe $(G, \circ)$ est-il commutatif?

3) Déterminer tous les sous-groupes de $(G, \circ)$.

4) a) Quel est le plus petit sous-groupe de $(G, \circ)$ contenant f_2 ?

b) Quel est le plus petit sous-groupe de $(G, \circ)$ contenant f_3 ?

c) Quel est le plus petit sous-groupe de $(G, \circ)$ contenant f_2 et f_3 ?

exercice 2

1) Quel est le plus petit sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ contenant 7 et 3?

2) Quel est le plus petit sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ contenant 28 et 217?

exercice 3

1) La réunion de deux sous-groupes d'un même groupe est-elle forcément un sous-groupe?

2) L'intersection de deux sous-groupes d'un même groupe est-elle forcément un sous-groupe?

Exercice 4

I – Études d'exemples:

1) Soit G_1 l'ensemble des applications suivantes de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans lui-même:

$f_1 : x \to x\,;\quad f_2 : x \to -x\,;\quad f_3 : x \to \frac{1}{x}\,;\quad f_4 : x \to -\frac{1}{x}\,;$

Montrer que $G_1 = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un groupe pour la composition des applications. Déterminer le sous-groupe engendré par chaque élément.

Vocabulaire:

- Le *sous-groupe engendré par un élément* est le plus petit sous-groupe contenant cet élément, c'est-à-dire l'intersection de tous les sous-groupes contenant cet élément.
- Le sous-groupe engendré par x est noté $< x >$. Le nombre d'éléments du sous-groupe engendré par x est appelé *l'ordre de x*.
- S'il existe un élément du groupe qui engendre le groupe tout entier, on dit que le groupe est *cyclique*.

2) Soit G_2 l'ensemble racines quatrièmes de l'unité, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes solutions de l'équation $z^n = 1$. Montrer que G_2 est un groupe pour la multiplication des nombres complexes. Déterminer le sous-groupe engendré par chaque élément. Le groupe G_2 est-il cyclique?

3) Soit G_3 l'ensemble des bijections du plan qui laissent un segment invariant. Montrer que G_3 est un groupe pour la composition des applications. Le groupe G_3 est-il cyclique?

4) Soit A un point du plan et soit G_4 l'ensemble des rotations du plan de centre A et d'angle $\frac{2k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$. Montrer que G_4 est un groupe pour la composition des applications.

5) Soit G_5 l'ensemble formé des pairs de réels suivantes: $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ et $(-1, -1)$. On définit une loi de composition par $(a, b) * (a', b') = (aa', bb')$.

Montrer que G_5 muni de cette loi est un groupe.

II – Synthèse:

Certains de ces groupes « se ressemblent ». Lesquels?

Comment formaliser cette idée?

Fin du document, Début de mon brouillon

exercice 5

http://www.ilemaths.net/forum-sujet-255240.html

Pour x, y réels, on pose $x*y = x\sqrt{(1+y^2)} + y\sqrt{(1+x^2)}$.

1) Vérifier que $\sqrt{1+(x*y)^2} = \sqrt{(1+x^2)}.\sqrt{(1+y^2)}+xy$

2) Montrer que $(\mathbb{R},*)$ est un groupe.

3) Montrer que l'apllication sh est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ sur $(\mathbb{R},*)$.

exercice 6

Pour deux points M(x,y) et M'(x',y'), on définit M*M' come étant le point de coordonnées (xx'+yy' , xy'+yx').
Montrer que cette loi * munit H d'une structure de groupe commutatif; préciser l'élément neutre et le symétrique de M.

exercice 7

Bonjour,
je voudrais montrer que tout groupe d'ordre 4 est isomorphe à R4 = {1,-1,-i,i} ou à R2XR2 = {(1,1),(-1,-1),(1,-1),(-1,1)} (on note Rp l'ensemble ds racines p-ièmes de l'unité).
J'ai déjà montré que R4 et R2XR2 ne sont pas isomorphes car R4 est cyclique alors que R2XR2 ne l'est pas.
Ensuite, si on prend un groupe d'ordre 4 cyclique alors il est isomorphe à R4 (je sais le montrer 🙂).
En revanche je n'arrive pas à montrer que si on prend un groupe d'ordre 4 non cyclique alors il est isomorphe à R2XR2 ???🙁.
Merci de votre aide

exercice 8

Si on définit Q le groupe des quaternions comme :

$$Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \mid ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j\}$$

alors Q admet 6 éléments d'ordre 4 $(\pm i, \pm j, \pm k)$, 1 élément d'ordre 2 (-1) et bien sûr un élément d'ordre 1.

Définissons le groupe diédral D_4 comme le groupe des isométries planes laissant le carré invariant, alors il admet 2 élélments d'ordre 4 (les rotations d'angle $\pm\frac{\pi}{4}$), 5 éléments d'ordre 2 (la rotation d'angle π et les symétries par rapport aux 2 diagonales et par rapport aux 2 apothèmes. Auquel il faut ajouter bien sûr l'identité.

Il me semble alors difficile que ces deux groupes soient isomorphes.

http://serge.mehl.free.fr/anx/gpe_sym.html