Fonction Exponentielle — T.S.

Introduction :

- Vu dans le journal « *La population mondiale croit de façon exponentielle* » au sens « *cela augmente de plus en plus vite.* »
- Vu (ou pas) en physique : La fonction exponentielle permet de faire les calculs lors des datations au carbone 14 par exemple, en utilisant la notion de demi-vie d' un élément.
- Vu en physique : La fonction exponentielle permet de construire la fonction logarithme, que vous utilisez pour les calculs de pH. La fonction exponentielle permet en particulier de calculer x connaissant le logarithme de x .
- Curiosité intellectuelle gratuite 1: Vous n'avez encore jamais rencontré une fonction égale à sa dérivée ni même proportionnelle à sa dérivée. Une telle fonction existe-t-elle ?
- Curiosité intellectuelle gratuite 2: Vous n'avez encore rencontré ni de fonctions qui transforment les produits en somme ni de fonctions qui transforment les sommes en produits. De telles fonctions existent-t-elle ?

I. Définition et propriétés algébriques

A. Définition et premières propriétés

On admet qu'il existe au moins une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que : $f'=f$ et $f(0)=1$.
On va démontrer (en deux temps) qu'une telle fonction est unique :

Lemme 1. Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f'=f$ et $f(0)=1$, alors pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0$.

Démonstration (▣ ROC en vue!)
Soit h la fonction définie par $h(x)=f(x).f(-x)$. *Cette fonction est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, sa dérivée est* $h'(x)=f'(x)\times f(-x)+f(x)\times f'(-x)\times(-1)$;
comme $f'(x)=f(x)$ *et* $f'(-x)=f(-x)$, *on trouve* $h'(x)=0$. *La fonction h est donc constante, et pour tout réel x,* $h(x)=h(0)=f(0)\times f(0)=1$.
Ainsi, pour tout réel x, $f(x).f(-x)=1$, ce qui montre que $f(x)$ ne peut pas être égal à 0.

Théorème et définition 2: Il existe une unique fonction f , dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'=f$ et $f(0)=1$. Elle est appelée la ***fonction exponentielle***; elle est notée $\exp$, l'image d'un réel x sera notée $\exp(x)$ ou $\exp x$.

Démonstration
▪ *On a admis l'existence.*
▪ *Unicité* (▣ ROC en vue!)*: Supposons que* f_1 *et* f_2 *soient deux fonctions vérifiant les conditions* $f' = f$ *et* $f(0) = 1$*.Soit h la fonction définie par* $h(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ *; cette fonction est bien définie sur* $\mathbb{R}$ *car, d'après la propriété précédente,* $f_2(x)$ *ne peut pas s'annuler. La fonction h est dérivable et* $h'(x)=\frac{f_1'(x).f_2(x)-f_2'(x).f_1(x)}{\left(f_2(x)\right)^2}$. *Mais comme* $f_1'(x)=f_1(x)$ *et* $f_2'(x)=f_2(x)$*, on a* $h'(x)=0$ *et la fonction h est constante.*
Pour tout réel x, $h(x) = h(0) = \frac{f_1(0)}{f_2(0)}=\frac{1}{1} = 1$. *Ainsi* $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=1$, *et* $f_1(x) = f_2(x)$*, ce qui montre qu'il n'existe qu'une seule fonction f dérivable sur* $\mathbb{R}$*, telle que* $f' = f$ *et* $f(0) = 1$*.*

Corollaires de ce qui précède

P 3 ▪ $\exp(0)=1$
P 4 ▪ La fonction exponentielle est dérivable et donc aussi continue sur $\mathbb{R}$.
P 5 ▪ $\forall x\in\mathbb{R},\ \exp'(x)=\exp(x)$
P 6 ▪ Pour tout réel x , $\exp(x)>0$. En particulier, pour tout réel x , $\exp(x)\neq 0$.

P 7 ▪ Si la fonction u est dérivable sur un intervalle I, alors $x \mapsto \exp(u(x))$ est dérivable sur *I* et a pour dérivée $x \mapsto \exp(u(x)) \times u'(x)$.

Démonstration de P6 : exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ *et est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc par le TVI, elle est soit strictement positive, soit strictement négative . Or* $\exp(0)=1>0$ *donc exp est strictement positive sur* $\mathbb{R}$ *.*

B. Propriété caractéristique et conséquences

Propriété caractéristique 8.
Pour tous réels a et b, $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$.
→ *La fonction exponentielle transforme les sommes en produits.*

Démonstration
Soit $g(x)=\dfrac{\exp(a+x)}{\exp(x)}$ *. On a* $g'(x)=\dfrac{\exp(a+x)\times\exp(x)-\exp(a+x)\times\exp(x)}{(\exp x)^2}=0$.
La fonction g est donc constante et pour tout x, $g(x)=g(0)=\exp(a)$.
D'où, $\dfrac{\exp(a+x)}{\exp(x)}=\exp(a)$ *, soit* $\exp(a+x)=\exp(a)\times\exp(x)$.
En prenant $x=b$ *, on retrouve la formule à démontrer.*

Corollaires : $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, on a
P 9 ▪ $\exp(-b)=\dfrac{1}{\exp(b)}$; **P 10** ▪ $\exp(a-b)=\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$; **P 11** ▪ $\exp(na)=(\exp(a))^n$.

Dem :
P 9: On remplace a par -b dans la formule caractéristique (et vu dans démonstration du lemme 1).
P 10: On remplace b par -b dans la formule caractéristique.
P 11: Pour n > 0, on remplace na par a + a + a + ... + a et on applique la formule caractéristique ou, si on veut être plus rigoureux, on procède par récurrence;
Pour n < 0, on pose p=-n et on se ramène au cas précédent.

Remarque 12. On retrouve que pour tout réel a, $\exp(a)>0$: Il suffit de remarquer que $\exp(a)=\left(\exp\left(\dfrac{a}{2}\right)\right)^2$ et que le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul. Comme exp(a) ≠ 0, on trouve bien exp(a) > 0.

II. Une notation de type puissance au vu des propriétés

Définitions 13. Par définition, on appelle *e* le nombre égal à exp(1). On a $e \approx 2,718$ et $e \notin \mathbb{Q}$.

Commençons par faire deux remarques :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exp(n)=\exp(1\times n)=[\exp(1)]^n=e^n$. De plus, $\exp(-n)=\dfrac{1}{\exp(n)}=\dfrac{1}{e^n}=e^{-n}$
2. Les propriétés 9 à 11 de la fonction exponentielle sont semblables à celles des puissances.

Ceci a amené les mathématiciens à adopter la notation suivante :

Nouvelle notation 14. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)$ sera note e^x , que l'on lit « e puissance x »

Les propriétés de la fonction exponentielle s'écrivent alors :

Réécritures des propriétés avec cette notation 15. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, on a

▪ $e^{a+b}=e^a\times e^b$ ▪ $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$ ▪ $e^{-b}=\dfrac{1}{e^b}$ ▪ $e^{na}=(e^a)^n$

▪ Si la fonction u est dérivable sur un intervalle I, alors $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et a pour dérivée $x \mapsto e^{u(x)}\times u'(x)$. On retient $\boldsymbol{[e^u]'=e^u\times u'}$.

III. Étude de la fonction exponentielle

A. Variations

Propriété 16. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Dem : La dérivée est e^x *, elle est strictement positive sur* $\mathbb{R}$.

Conséquences. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ **P 17** ▪ $a<b \Leftrightarrow e^a<e^b$; **P 18** ▪ $e^a=e^b \Leftrightarrow a=b$

Dem : C'est une conséquence de la croissance stricte : $a<b \Rightarrow e^a<e^b$ *et* $a>b \Rightarrow e^a>e^b$.

B. Tableau de variations et courbe

▪ Les résultats précédents permettent de construire le **tableau de variations de la fonction exponentielle** :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
signe de $f'(x)=e^x$	$+$
$f=\exp$	$0 \nearrow +\infty$

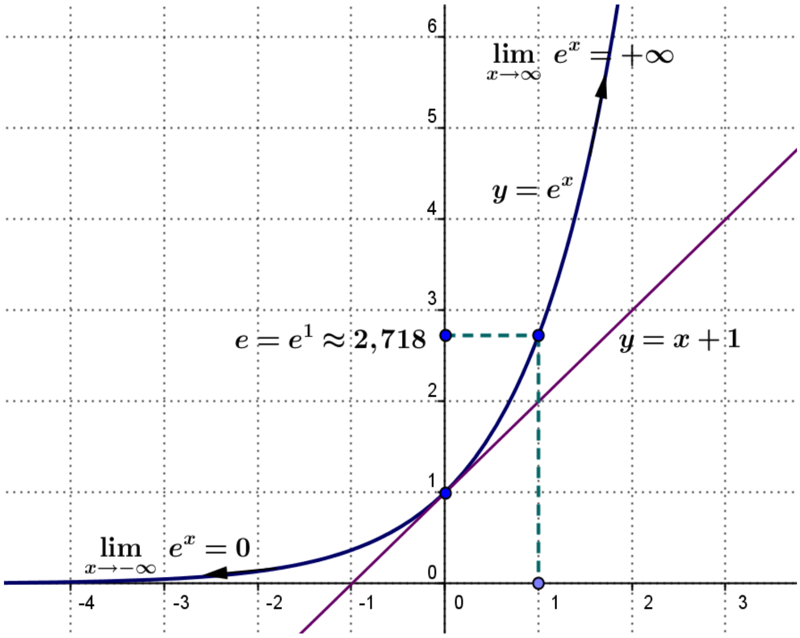
$+\infty$ signifie $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

0 signifie $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$

Remarque : On admet (provisoirement) que $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$.

▪ Pour construire la **courbe représentative de la fonction exponentielle** on notera qu'elle passe par le point de coordonnées (0, 1) et que la tangente en ce point admet $y=x+1$ comme équation.

En effet : $e^0=1$ *et le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 est aussi* $e^0=1$. *La formule* $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ *devient donc* $y=e^0(x-0)+e^0=x+1$.



Sources : Labomath ; Manuel Repères ; Manuel Hyperbole ; Site de G. Costantini, Manuel Déclic.

Table des matières

Le programme officiel

Fonction exponentielle		
Fonction $x \mapsto \exp(x)$.	▣ Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur **R**, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.	La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction f dérivable sur **R** telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence est admise.
Relation fonctionnelle, notation e^x.	▣ Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$. • Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. • Connaître le sens de variation et la représentation graphique de la fonction exponentielle. • Connaître et exploiter $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.	On étudie des exemples de fonctions de la forme $x \mapsto \exp(u(x))$, notamment avec $u(x) = -kx$ ou $u(x) = -kx^2$ ($k > 0$), qui sont utilisées dans des domaines variés. On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 et la limite en 0 de $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$. ⇆ [SPC et SVT] Radioactivité. (AP) *Étude de phénomènes d'évolution.*

<u>Notre progression</u> :

Fonction exponentielle 3 S

- définition différentielle et premières propriétés
- relation fonctionnelle
- notation e^x
- étude de la fonction