

Introduction :

- Vu dans le journal « La population mondiale croit de façon exponentielle » au sens « cela augmente de plus en plus vite. »
- Vu (ou pas) en physique : La fonction exponentielle permet de faire les calculs lors des datations au carbone 14 par exemple, en utilisant la notion de demi-vie d' un élément.
- Vu en physique : La fonction exponentielle permet de construire la fonction logarithme, que vous utilisez pour les calculs de pH. La fonction exponentielle permet en particulier de calculer x connaissant le logarithme de x .
- *Curiosité intellectuelle gratuite 1*: Vous n'avez encore jamais rencontré une fonction égale à sa dérivée ni même proportionnelle à sa dérivée. Une telle fonction existe-t-elle ?
- *Curiosité intellectuelle gratuite 2*: Vous n'avez encore rencontré ni de fonctions qui transforment les produits en somme ni de fonctions qui transforment les sommes en produits. De telles fonctions existent-elle ?

I. Définition et propriétés algébriques

A. Définition et premières propriétés

On admet qu'il existe au moins une fonction f dérivable sur \mathbb{R} , telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$

On va démontrer (en deux temps) qu'une telle fonction est unique :

Lemme 1. Si f est une fonction dérivable sur \mathbb{R} , telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, alors pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) \neq 0$.

Démonstration (☐ ROC en vue!). *Idee* : prouver que $h(x) = f(x) \cdot f(-x)$ est une fonction constante.

Théorème et définition 2: Il existe une unique fonction f , dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Elle est appelée la **fonction exponentielle**; elle est notée \exp , l'image d'un réel x sera notée $\exp(x)$ ou $\exp x$.

Démonstration

Corollaires de ce qui précède

P 3 ▪ $\exp(0) = 1$

P 4 ▪ La fonction exponentielle est dérivable et donc aussi continue sur \mathbb{R} .

P 5 ▪ $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$

P 6 ▪ Pour tout réel x , $\exp(x) > 0$. En particulier, pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.

P 7 ▪ Si la fonction u est dérivable sur un intervalle I , alors $x \mapsto \exp(u(x))$ est dérivable sur I et a pour dérivée $x \mapsto \exp(u(x)) \times u'(x)$.

B. Propriété caractéristique et conséquences

Propriété caractéristique 8.

Pour tous réels a et b , $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

→ La fonction exponentielle transforme les sommes en produits.

Démonstration

Corollaires : $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, on a

P 9 ▪ $\exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}$; **P 10** ▪ $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$; **P 11** ▪ $\exp(na) = (\exp(a))^n$.

Dem :

Remarque 12. On retrouve que pour tout réel a , $\exp(a) > 0$: Il suffit de remarquer que $\exp(a) = \left(\exp\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2$ et que le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul. Comme $\exp(a) \neq 0$, on trouve bien $\exp(a) > 0$.

II. Une notation de type puissance au vu des propriétés

Définitions 13. Par définition, on appelle e le nombre égal à $\exp(1)$. On a $e \approx 2,718$ et $e \notin \mathbb{Q}$.

Commençons par faire deux remarques :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exp(n) = \exp(1 \times n) = [\exp(1)]^n = e^n$. De plus, $\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$
- Les propriétés 9 à 11 de la fonction exponentielle sont semblables à celles des puissances.

Ceci a amené les mathématiciens à adopter la notation suivante :

Nouvelle notation 14. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)$ sera noté e^x , que l'on lit « e puissance x »

Les propriétés de la fonction exponentielle s'écrivent alors :

Réécritures des propriétés avec cette notation 15. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\bullet e^{a+b} = e^a \times e^b \quad \bullet e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad \bullet e^{-b} = \frac{1}{e^b} \quad \bullet e^{na} = (e^a)^n$$

• Si la fonction u est dérivable sur un intervalle I , alors $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et a pour dérivée $x \mapsto e^{u(x)} \times u'(x)$. On retient $[e^u]' = e^u \times u'$.

III. Étude de la fonction exponentielle

A. Variations

Propriété 16. La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Dem : La dérivée est e^x , elle est strictement positive sur \mathbb{R} .

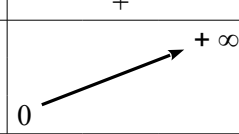
Conséquences. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ **P 17** • $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$; **P 18** • $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

Dem : C'est une conséquence de la croissance stricte : $a < b \Rightarrow e^a < e^b$ et $a > b \Rightarrow e^a > e^b$.

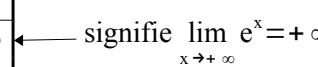
B. Tableau de variations et courbe

• Les résultats précédents permettent de construire le **tableau de variations de la fonction exponentielle** :

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f'(x) = e^x$	+	
$f = \exp$	0	$+\infty$



 signifie $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

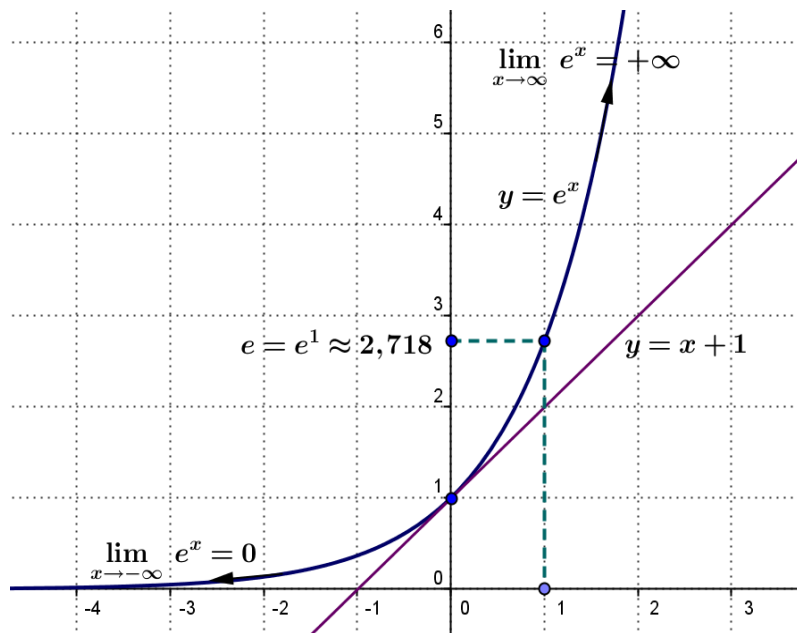


 signifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Remarque : On admet (provisoirement) que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

• Pour construire la **courbe représentative de la fonction exponentielle** on notera qu'elle passe par le point de coordonnées (0, 1) et que la tangente en ce point admet $y = x + 1$ comme équation.

En effet : $e^0 = 1$ et le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 est aussi $e^0 = 1$. La formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ devient donc $y = e^0(x-0) + e^0 = x + 1$.



Sources : Labomath ; Manuel Repères ; Manuel Hyperbole ; Site de G. Costantini, Manuel Déclic.

Table des matières

I. Définition et propriétés algébriques.....	1
A. Définition et premières propriétés.....	1
B. Propriété caractéristique et conséquences	2
II. Une notation de type puissance au vu des propriétés.....	2
III. Étude de la fonction exponentielle.....	3
A. Variations.....	3
B. Tableau de variations et courbe.....	3

Démonstrations de COURS

Elles sont à part pour ne pas vous priver du plaisir de les trouver tous seuls en classe...

■ Démonstration du lemme 1 (☑ ROC en vue!)

Soit h la fonction définie par $h(x) = f(x) \cdot f(-x)$. Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} , sa dérivée est $h'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times f'(-x) \times (-1)$;

comme $f'(x) = f(x)$ et $f'(-x) = f(-x)$, on trouve $h'(x) = 0$. La fonction h est donc constante, et pour tout réel x , $h(x) = h(0) = f(0) \times f(0) = 1$.

Ainsi, pour tout réel x , $f(x) \cdot f(-x) = 1$, ce qui montre que $f(x)$ ne peut pas être égal à 0.

■ Démonstration du théorème/définition 2.

▪ On a admis l'existence.

▪ Unicité (☑ ROC en vue!): Supposons que f_1 et f_2 soient deux fonctions vérifiant les conditions $f' = f$ et $f(0) = 1$. Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$; cette fonction est bien définie sur \mathbb{R} car, d'après la propriété précédente, $f_2(x)$ ne peut pas s'annuler. La fonction h est dérivable et $h'(x) = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_2'(x) \cdot f_1(x)}{(f_2(x))^2}$. Mais comme $f_1'(x) = f_1(x)$ et $f_2'(x) = f_2(x)$, on a $h'(x) = 0$ et la fonction h est constante.

Pour tout réel x , $h(x) = h(0) = \frac{f_1(0)}{f_2(0)} = \frac{1}{1} = 1$. Ainsi $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$, et $f_1(x) = f_2(x)$, ce qui montre qu'il n'existe qu'une seule fonction f dérivable sur \mathbb{R} , telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

■ Démonstration de P6 : La fonction \exp ne s'annule pas sur \mathbb{R} et est continue sur \mathbb{R} donc par le TVI, elle est soit strictement positive, soit strictement négative. Or $\exp(0) = 1 > 0$ donc \exp est strictement positive sur \mathbb{R} .

■ Démonstration de la propriété caractéristique P8 :

Soit $g(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(x)}$. On a $g'(x) = \frac{\exp(a+x) \times \exp(x) - \exp(a+x) \times \exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$.

La fonction g est donc constante et pour tout x , $g(x) = g(0) = \exp(a)$.

D'où, $\frac{\exp(a+x)}{\exp(x)} = \exp(a)$, soit $\exp(a+x) = \exp(a) \times \exp(x)$.

En prenant $x = b$, on retrouve la formule à démontrer.

■ Démonstration de P 9, P 10, P 11:

P 9: On remplace a par $-b$ dans la formule caractéristique (et vu dans démonstration du lemme 1).

P 10: On remplace b par $-b$ dans la formule caractéristique.

P 11: Pour $n > 0$, on remplace n par $a + a + a + \dots + a$ et on applique la formule caractéristique ou, si on veut être plus rigoureux, on procède par récurrence;

Pour $n < 0$, on pose $p = -n$ et on se ramène au cas précédent.

Le programme officiel

<p>Fonction exponentielle</p> <p>Fonction $x \mapsto \exp(x)$.</p> <p>Relation fonctionnelle, notation e^x.</p>	<p>☐ Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur \mathbf{R}, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.</p> <p>☐ Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. • Connaître le sens de variation et la représentation graphique de la fonction exponentielle. • Connaître et exploiter $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$. 	<p>La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction f dérivable sur \mathbf{R} telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence est admise.</p> <p>On étudie des exemples de fonctions de la forme $x \mapsto \exp(u(x))$, notamment avec $u(x) = -kx$ ou $u(x) = -kx^2$ ($k > 0$), qui sont utilisées dans des domaines variés.</p> <p>On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 et la limite en 0 de $\frac{e^x - 1}{x}$.</p> <p>⇔ [SPC et SVT] Radioactivité.</p> <p>Ⓐ Étude de phénomènes d'évolution.</p>
---	--	---

Notre progression :

- | | |
|---|-----------|
| <p>Fonction exponentielle</p> <ul style="list-style-type: none"> - définition différentielle et premières propriétés - relation fonctionnelle - notation e^x - étude de la fonction | <p>30</p> |
|---|-----------|