Ch 4	Fonctions	$1^{ère}$ S

I. Fonctions, sens de variation........1

II. Fonctions de référence........2
A. Fonctions racine carrée........3
B. Fonctions inverse........3
C. Comparaison des fonctions constante, racine carrée, carré et cube........3
D. Fonction valeur absolue........3

III. Application : Sens de variation de fonctions obtenues en appliquant successivement plusieurs fonctions........5

Objectifs du chapitre

- ☐ [2^{nde}] Savoir déterminer le domaine de définition d'une fonction.
- ☐ [2^{nde}] Savoir lire le tableau de variations d'une fonction.
- ☐ [2^{nde}] Connaître les règles de manipulation des inégalités.
- ☐ [2^{nde}] Savoir construire le tableau de variations d'une fonction connaissant ses variations.
- ☐ Connaître les variations et les courbes représentatives des fonctions usuelles ([2^{nde}] affine, carré, inverse, racine carrée et [$1^{ère}$] valeur absolue).
- ☐ [2^{nde}] Résolution d'équations et d'inéquations ($f(x)=0$, $f(x)<g(x)$, $f(x)=m$ …etc) graphiquement et par le calcul. Notamment, savoir déterminer le signe d'une expression au moyen d'une factorisation suivie d'un tableau de signe.
- ☐ Savoir démontrer qu'une fonction est croissante ou décroissante en manipulant des inégalités.
- ☐ Savoir déterminer les variations de $x\mapsto u(x)+k$, $x\mapsto\lambda u(x)$, $x\mapsto\sqrt{u(x)}$ et $x\mapsto\dfrac{1}{u(x)}$ connaissant les variations de la fonction u.

Objectifs du chapitre en terme de TICE

- ☐ [2^{nde}] Savoir tracer le graphe d'une fonction à l'aide d'une calculatrice.
- ☐ [2^{nde}] Savoir obtenir un tableau de valeur d'une fonction à la calculatrice.
- ☐ [2^{nde}] Savoir trouver une valeur approchée d'une solution d'une équation de type $f(x)=g(x)$ à la calculatrice.

Fiches sur l'utilisation des calculatrices : http://xmaths.free.fr/tice/calculatrice/fiches.htm.

Espace pour cocher ce qui est acquis: Utilisez cette liste d'objectifs pour vérifier que vous êtes au point sur ce chapitre.

I. Fonctions, sens de variation

Définition: *Définir une fonction numérique* (ou une application) f sur un ensemble de réels D, c'est associer à **tout** réel x de D **un réel et un seul** noté $f(x)$.
L'ensemble D sera appelé *ensemble de définition* de la fonction f.

Convention: Si l'ensemble de définition n'est pas précisé, il est convenu que l'ensemble de définition est le plus grand ensemble sur lequel $f(x)$ existe.

Pratique: Avec les fonctions que vous connaissez, les seules opérations interdites sont de diviser par zéro et de prendre la racine carrée d'un nombre strictement négatif.

♠ Exercice 1. Déterminer les domaines de définition des fonctions définies par : **1)** $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x+1}$; **2)** $f(x)=\sqrt{5+2x}$; **3)** $f(x)=\sqrt{x^2+3}$; **4)** $f(x)=\sqrt{2x^2+5x-3}$; **5)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^2+5x-3}}{4+3x}$.

Parents, élèves, tuteurs: Ne faites **PAS** les exercices des polycopiés de cours à l'avance: Nous les ferons EN CLASSE.

Définitions: Soit f une fonction définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
Soit I un intervalle contenu dans D.
1) On dit que f est *croissante sur I* ssi[1] pour tous $a,b\in I$, si $a<b$ alors $f(a)\leq f(b)$.
2) On dit que f est *strictement croissante sur I* ssi pour tous $a,b\in I$, si $a<b$ alors $f(a)<f(b)$
3) On dit que f est *décroissante sur I* ssi pour tous $a,b\in I$, si $a<b$ alors $f(a)\geq f(b)$.
4) On dit que f est *strictement croissante sur I* ssi pour tous $a,b\in I$, si $a<b$ alors $f(a)>f(b)$
5) Si une fonction f est croissante sur un intervalle I ou décroissante sur I, on dit que f est *monotone* sur *I.*

Autrement dit, une fonction croissante est une fonction qui conserve l'ordre (c'est-à-dire que les antécédents et les images sont dans le même ordre) et une fonction décroissante est une fonction qui inverse l'ordre (c'est-à-dire que les antécédents et les images sont dans l'ordre inverse).
On dit aussi qu'une fonction croissante respecte les inégalités alors qu'une fonction décroissante les retourne.

En résumé, les inégalités sont conservées sauf quand on multiplie/divise par des nombres négatifs.

Rappel : Manipulation des inégalités

1) Si on **ajoute** (ou soustrait[2]) le même nombre (positif ou non) aux deux membres d'une inégalité, l'inégalité est conservée.
Ex : $-2\leq 1$ donc, pour tout x, on a $-2+x\leq 1+x$.
2) Si on **multiplie** (ou divise[3]) les deux membres d'une inégalité le même nombre **positif**, l'inégalité est conservée.
Ex : pour tout x, $-2+x\leq 1+x$ donc $\dfrac{-2+x}{5}\leq\dfrac{1+x}{5}$
3) Si on **multiplie** (ou divise) les deux membres d'une inégalité le même nombre **négatif**, l'inégalité est **retournée**.
Ex : pour tout x, $\dfrac{-2+x}{5}\leq\dfrac{1+x}{5}$ donc $-3\left(\dfrac{-2+x}{5}\right)\geq -3\left(\dfrac{1+x}{5}\right)$
4) On peut toujours **ajouter** des inégalités membres à membre.
Ex : pour tout x, $-2+x\leq 1+x$ et $-3x\leq -3x+2$ donc (en ajoutant ces inégalités membre à membre), pour tout x, $-2+x-3x\leq 1+x-3x+2$ c'est-à-dire $-2-2x\leq 3-2x$
5) On peut **multiplier** des inégalités membres à membre à condition que tous les membres soient **positifs.**
Ex : $\sqrt{2}\leq 1{,}5$ et $\sqrt{3}\leq 2$ donc $\sqrt{6}\leq 3$ (en multipliant membre à membre)

♠ Exercice 2.
1) Démontrer que la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$.
2) Déterminer le sens de variation de la fonction affine définie par $f(x)=mx+p$ sur son ensemble de définition.
3) ▣[4] Démontrer que la fonction racine carrée est croissante sur son ensemble de définition.
4) *Pour vous* : Déterminer les variations de la fonction carré sur son ensemble de définition.

II. Fonctions de référence

Il faut connaître parfaitement les propriétés et l'allure des courbes représentatives de ces fonctions.

A. Fonctions racine carrée

Définition 3. La racine carrée d'un nombre positif a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique nombre ....

dont ....

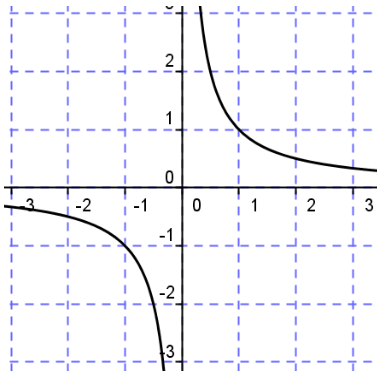
[1] *« ssi » signifie « si et seulement si », c'est-à-dire que les deux énoncés (= phrases) sont rigoureusement équivalents.*
[2] *La règle pour la soustraction est une conséquence de celle pour l'addition car « soustraire = ajouter l'opposé ».*
[3] *La règle pour la division est une conséquence de celle pour la multiplication car « Diviser = multiplier par l'inverse ».*
[4] *Ce symbole signifie « démonstration exigible ».*

Propriété 4. Sens de variation : La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement . . . . sur . . . .

B. Fonctions inverse

♠ Exercice 5. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, représentée ci-contre, est-elle décroissante sur $\mathbb{R}$?

Démonstration ou contre-exemple : . . . .



Propriété 6. Sens de variation : La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement . . . . sur . . . .

♠ Exercice 7. Utiliser les variations des fonctions usuelles et les règles de manipulation d'inégalités pour déterminer le sens de variation de $f(x)=\frac{-9}{x^2+5}$ sur $[0,+\infty[$. Et sur $]-\infty,0[$?

C. Comparaison des fonctions constante, racine carrée, carré et cube

♠ Exercice 8.

1) Conjecture : Le graphique ci-dessous, représente les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^3$

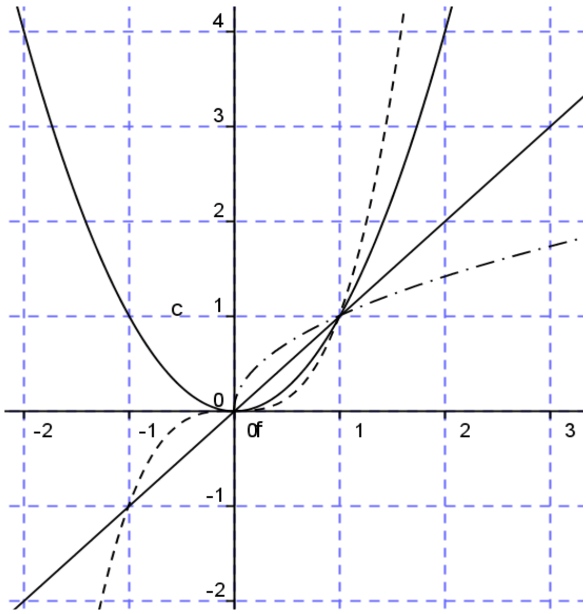
Associer à chaque fonction sa courbe représentative.

En déduire une conjecture sur les valeurs relatives de x, x^2, x^3 et $\sqrt{x}$ selon les valeurs de x.

Compléter :

Si $0 < x < \ldots.$, alors … < … < … < …
Si $x > \ldots.$, alors … < … < … < …

2) ▣ Preuve : Justifier le résultat en utilisant exclusivement les sens de variations des fonctions usuelles et les règles de manipulation d'inégalités.



> ✋ Parents, élèves, tuteurs:
> Ne faites **PAS** les exercices des polycopiés de cours à l'avance: Nous les ferons EN CLASSE.

D. Fonction valeur absolue

Mais si, rappelez-vous, vous avez déjà rencontré la fonction valeur absolue : C'était en classe 5ème, mais à l'époque, vous l'appeliez «distance à zéro ». Si on place 4 et -4 sur un axe gradué, ils sont tous les deux situés à 4 unités de 0, donc on dit que leur *distance à zéro est égale à 4* et on le note $|4|=|-4|=4$, les deux barres se lisant « distance à zéro » ou (et dorénavant ce sera toujours le cas) « *valeur absolue* ».

♠ Exercice 9. Compléter |+3| =. . . . , |-3| = ... ; $\left|\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right|$=……. ; $|1-\sqrt{2}|$ = ...

Propriété: Pour tout nombre réel X, $|X| \geqslant 0$

Dem : Forcément, puisque c'est une distance !

♠ Exercice 10. Comparer $|X|$ et $|-X|$ puis compléter :

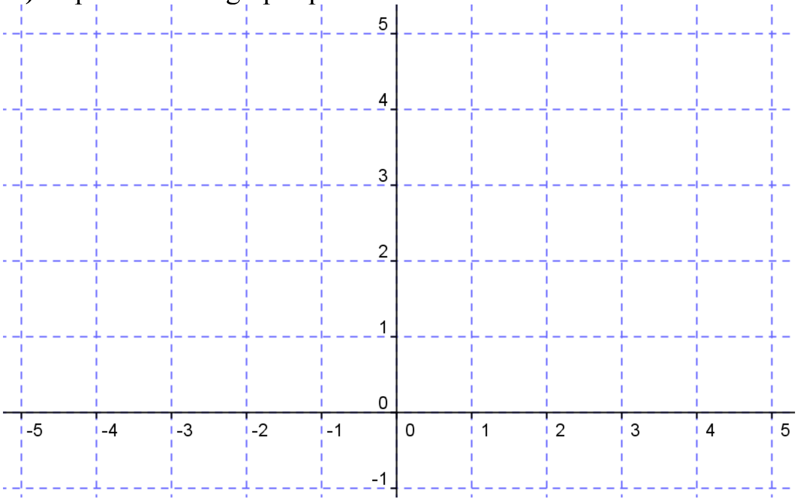
Propriété: $|-X|......|X|$ . . . .

Définition: La fonction *valeur absolue* est définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} |X| = X & \text{si } X \geqslant 0 \\ |X| = -X & \text{si } X < 0 \end{cases}$.

$|X|$ se lit *« valeur absolue de X »*. C'est la distance entre les nombres X et 0 sur un axe gradué.

♠ Exercice 11.

1) Représentation graphique de la fonction valeur absolue:



2) Compléter : La courbe représentative de la fonction valeur absolue est .... par rapport à ....

Remarque 12: En général, $|x+y| \neq |x|+|y|$ (prouvez-le!) mais on se console avec $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ l'inégalité triangulaire, vraie pour tout x et y (prouvez-le!).

Parents, élèves, tuteurs: Ne faites **PAS** les exercices des polycopiés de cours à l'avance: Nous les ferons EN CLASSE.

♠ Exercice 13. Résoudre

1) $|X| = 6$.

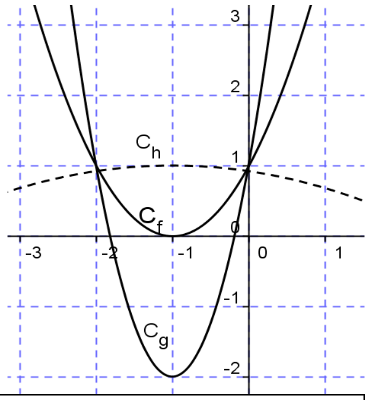
2) $|2x^2 + 7x - 3| = 6$.

♠ Exercice 14.

1) Rappeler la définition de la racine carrée d'un nombre positif a.

2) La racine carrée du carré d'un nombre toujours égale au nombre initial ? Autrement dit, l'égalité $\sqrt{x^2} = x$ est-elle vraie pour tout nombre x ? Si vous pensez que c'est le cas, démontrez-le. Sinon, proposez une formule corrigée et démontrez-la.

III. Application : Sens de variation de fonctions obtenues en appliquant successivement plusieurs fonctions



Définition : On dit que deux fonctions *ont les mêmes variations* si elles sont croissantes sur les mêmes intervalles et décroissantes sur les mêmes intervalles.

On dit que deux fonctions *ont des variations opposées* si l'une est croissante sur chaque intervalle où l'autre est décroissante et décroissante sur chaque intervalle où l'autre est croissante.

Exemple : Sur le dessin ci-contre, f et g ont les mêmes variations puisqu'elles sont toutes deux décroissantes sur $[-\infty,-1[$ et qu'elles sont toutes deux croissantes sur $[-1,+\infty[$.

Par ailleurs, f et h ont des variations opposées puisque sur $[-\infty,-1]$, f est décroissante et h est croissante et sur $[-1,+\infty[$, f est croissante et h est décroissante.

Parents, élèves, tuteurs:
Ne faites **PAS** les exercices des polycopiés de cours à l'avance: Nous les ferons EN CLASSE.

♠ Exercice 15.

1) Démonstration : Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$. Soit g la fonction définie sur D par $g(x)=f(x)+k$, où k est un nombre réel. On suppose que f est croissante sur un intervalle I contenu dans D et décroissante sur un intervalle J contenu dans D. Quel est le sens de variation de g sur I ? et sur J ?

2) Bilan : Compléter

Propriété: Les fonctions f et $f+k$ ont ....

♠ Exercice 16.

1) Un cas particulier: Soit f la fonction définie par $f(x)=-x^2-10x+6$. Soit g la fonction définie par $g(x)=-3f(x)$. Donnez le tableau de variations de f et en déduire celui de g.

2) Démonstration : Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$. Soit g la fonction définie sur D par $g(x)=\lambda f(x)$, où λ est un nombre réel. On suppose que f est croissante sur un intervalle I contenu dans D et décroissante sur un intervalle J contenu dans D. Quel est le sens de variation de g sur I ? et sur J ?

3) Bilan : Compléter

Propriété: Si λ . . . . , les fonctions f et λf ont . . . .
Si λ . . . . , les fonctions f et λf ont . . . .

♠ Exercice 17.

1) Un cas particulier: Soit u la fonction définie par $u(x)=-2x+6$. Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{u(x)}$. Indiquez dans un tableau les variations de u et son signe. En déduire le tableau de variations de f grâce aux règles de manipulation d'inégalités.

2) Cas général : Compléter

Propriété: Les fonctions u et $\dfrac{1}{u}$ ont . . . .
sur tout intervalle sur lequel . . . .

♠ Exercice 18. Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x^2 - 12x + 6$. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Donnez le tableau de variations de f et en déduire celui de g.

♠ Exercice 19.

1) Démonstration : Comparer les variations des fonctions $u : x \mapsto u(x)$ et $\sqrt{u} : x \mapsto \sqrt{u(x)}$.

2) Bilan : Compléter

Propriété: Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont . . . . sur tout intervalle sur lequel . . . .

☞ Parents, élèves, tuteurs:
Ne faites **PAS** les exercices des polycopiés de cours à l'avance: Nous les ferons EN CLASSE.