☐ Exercice 1. Découverte des fonctions définies par une intégrale et premiers pas vers le théorème fondamental du calcul intégral.

PARTIE I : Découverte de la fonction « aire sous la courbe » et conjecture sur sa dérivée

1) a et c sont des réels quelconques. Soit f la fonction constante égale à c et soit F la fonction définie sur $[a\,;+\infty[$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. Exprimer $F(x)$ puis $F'(x)$ en fonction de x.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=2t+3$ et soit F la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Exprimer $F(x)$ puis $F'(x)$ en fonction de x.

3) Émettre une conjecture sur la dérivée d'une fonction de la forme $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ où f est une fonction continue.

PARTIE II : Un exemple pour se familiariser avec la conjecture et cette drôle de fonction

On admet dans cette partie que la conjecture faite dans la partie précédente est vraie. On la démontrera dans un cas particulier dans la partie III et dans le cas général dans le cours.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$. *(On ne cherchera pas à exprimer F plus simplement. De toute façon on n'y arriverait pas!).*

4) Utiliser la conjecture pour exprimer $F'(x)$ en fonction de x.

5) Déterminer le tableau de signe de F sur $\mathbb{R}$.

6) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ de F au point d'abscisse 0.

7) Dans cette question on va étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T.

- **a)** Prouver que $\forall\, t\in\mathbb{R},\ \frac{1}{1+t^2}\leq 1$.
- **b)** En déduire que $\forall\, x\geq 0, F(x)\leq x$.
- **c)** Établir un résultat du même type pour $x<0$.
- **d)** Conclure sur la position relative de $\mathscr{C}$ et T selon les valeurs de x.

PARTIE III : Démonstration de la conjecture dans le cas de la fonction carré

Soit f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(t)=t^2$. [Source : A. Reiss-Barde]

On définit la fonction F sur $[1\,;+\infty[$ par $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$.

8) Interpréter la fonction F en terme d'aire.

9) Soit x un réel positif et h un réel strictement positif, justifier les inégalités :

$h\,f(x)\leq F(x+h)-F(x)\leq h\,f(x+h)$.

10) En déduire $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$.

11) De la même manière, déterminer $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$.

12) Justifier que F est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et préciser $F'(x)$.

13) Soit G la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $G(x)=\frac{1}{3}x^3$.

- **a)** Calculer la dérivée de $F-G$ sur $[1\,;+\infty[$. Que peut on déduire ?
- **b)** Déterminer $F(1)-G(1)$ et en déduire $F(x)$.
- **c)** Exprimer $F(2)=\int_1^2 f(t)\,dt$ en fonction de $G(1)$ et $G(2)$.

Primitives et calculs d'intégrales — T.S.

I. Notion de primitive

A. Définition et Lien entre les différentes primitives d'une même fonction

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle ***primitive de f*** toute fonction F définie sur I telle que $F' = f$ sur I.

Une fonction est souvent notée par une lettre minuscule et l'usage est de noter les primitives par la lettre majuscule correspondante.

Exemple : $x \mapsto 2x$ *est la dérivée de* $x \mapsto x^2$ *donc* $x \mapsto x^2$ *est une primitive de* $x \mapsto 2x$.

Remarquons que les fonctions $x \mapsto x^2+15$, $x \mapsto x^2+14\sqrt{2}$ *et* $x \mapsto x^2-25{,}8$ *sont aussi des primitives de* $x \mapsto 2x$. *Voilà pourquoi on dit UNE primitive et pas LA primitive.*

Cet exemple illustre en fait le cas général : On passe toujours d'une primitive d'une fonction à une autre en ajoutant une constante et, sur un intervalle, c'est même la seule façon d'obtenir de nouvelles primitives à partir d'une primitive connue. En effet, sur un intervalle deux primitives d'une même fonction diffèrent toujours d'une constante comme le dit le théorème suivant :

Propriétés 2. Lien entre les différentes primitives d'une même fonction

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I, alors :
- pour tout réel c, la fonction G définie par $G(x)=F(x)+c$ est une primitive de f sur I
- toute primitive de f est du type $F(x)+c$.

Autrement dit, si f possède des primitives sur un intervalle I, alors elle a une infinité de primitives sur I et il suffit de connaître **une** primitive F de f pour **toutes** les connaître. On dit parfois que F est unique à une constante additive près.

Démonstration : Soient F et G deux primitives de la fonction f sur I. On a $\forall x \in I,\ (G-F)'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$. *I étant un intervalle G – F est une fonction constante. Il existe donc un réel c tel que G – F = c. D'où le résultat G = F + c.*

Rappel : Si une fonction a une dérivée nulle sur un intervalle alors cette fonction est constante sur l'intervalle. (Voilà pourquoi on se place sur un intervalle.)

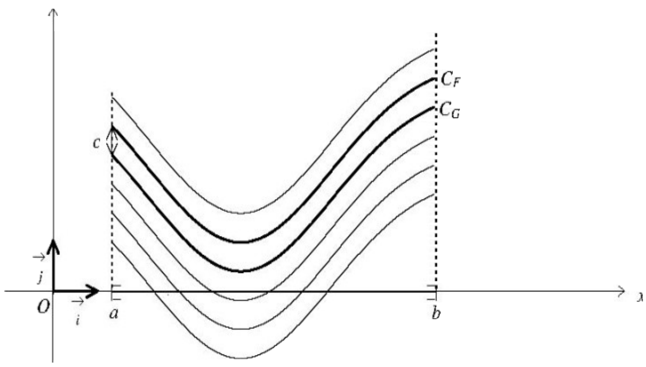
■ Et si on n'est pas sur un intervalle? Et bien deux primitives ne diffèrent pas forcément d'une constante.

Par exemple, $F(x)=\begin{cases}\ln(x) & \text{if } x>0\\ \ln(-x) & \text{if } x<0\end{cases}$ et $G(x)=\begin{cases}\ln(x)-3 & \text{if } x>0\\ \ln(-x)+5 & \text{if } x<0\end{cases}$ sont deux primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$ imais on ne peut pas passer de F à G en ajoutant une constante.

■ **Conséquences 3**. Interprétation graphique :

Soit f une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle I.

- Si $F=G+c$, alors $\mathscr{C}_F$ est l'image de $\mathscr{C}_G$ par la translation de vecteur $c\vec{j}$.
- Les courbes représentatives de deux primitives de f se donc déduisent l'une de l'autre par translation selon un vecteur colinéaire à l'axes des ordonnées.



■ L'interprétation graphique ci-dessus nous amène à nous demander si la courbe représentative d'une des primitives passe par un point $M(x_0; y_0)$ donné avec x_0 appartenant à I. En d'autres termes, existe-t-il une primitive F de f telle que $F(x_0)=y_0$?

Propriétés 4. Il existe une unique primitive de f passant par un point donné

Soit f une fonction définie sur un intervalle I admettant des primitives sur I. x_0 et y_0 sont deux réels fixés avec x_0 appartenant à I. f admet une unique primitive F_0 sur I vérifiant la condition initiale $F_0(x_0)=y_0$.

Démonstration : Soit F une primitive de f sur I, F est fixée. Toutes les primitives G de f sont de la forme $G=F+c$ *où c est une constante réelle.*

<u>Condition nécessaire</u> : Supposons qu'une primitive G de f satisfasse la condition $G(x_0)=y_0$. *G est une primitive de f donc il existe une nombre c tel que* $\forall x\in I, G(x)=F(x)+c$. *Pour* $x=x_0$, *ceci entraîne* $y_0=F(x_0)+c$ *c'est à dire* $c=y_0-F(x_0)$. *On a donc nécessairement* $\forall x\in I, G(x)=F(x)+y_0-F(x_0)$. *F étant fixée, il y a donc au plus une primitive qui convient.* [Il existe au plus une solution au problème]

<u>Condition suffisante</u> : On vérifie que la fonction $F_0: x\mapsto F(x)+y_0-F(x_0)$ *est une primitive de f qui vérifie* $F_0(x_0)=y_0$. [Il existe au moins une solution au problème]

B. Primitives des fonctions usuelles (A connaître par cœur!)

Une lecture "inverse" du tableau des dérivées des fonctions de référence nous donne le tableau suivant :

LA FONCTION	ADMET POUR PRIMITIVES LES FONCTIONS	SUR L'INTERVALLE
	Fonctions usuelles	
$x\mapsto a$ (fonction constante, avec $a\in\mathbb{R}$ fixé)	où *c* est une constante réelle	$\mathbb{R}$
$x\mapsto x^n$ où $n\in\mathbb{Z}$ et $n\neq -1$	où *c* est une constante réelle	▪ $\mathbb{R}$ si $n\geqslant 0$ ▪ $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ si $n<0$
$x\mapsto\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	où *c* est une constante réelle	$]0;+\infty[$
$x\mapsto\dfrac{1}{x}$	où *c* est une constante réelle	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
	Avec des composées et des opérations	
$x\mapsto u'\times\cos u$ avec *u* dérivable sur *I*	où *c* est une constante réelle	*I*
$x\mapsto u'\times\sin u$ avec *u* dérivable sur *I*	où *c* est une constante réelle	*I*
$u'\times u^n$ (où $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 1$) *avec u dérivable sur I et, si* $n<0$, *pour tout x de I,* $u(x)\neq 0$	où *c* est une constante réelle	*I*
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec *u* dérivable sur *I* et, pour tout *x* de *I*, $u(x)>0$	où *c* est une constante réelle	*I*
$u'\times e^u$ avec *u* dérivable sur *I*	où *c* est une constante réelle	*I*
$\dfrac{u'}{u}$ avec *u* dérivable sur *I* et $\forall x\in I, u(x)>0$ OU $\forall x\in I, u(x)<0$	où *c* est une constante réelle	*I*

<u>Remarque</u> :

La primitive d'un produit ne sera pas obtenue en prenant le produit des primitives : en effet la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

II. Lien entre primitives et intégrales

A. Les intégrales permettent de construire une primitive de n'importe quelle fonction continue

Propriétés 5.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a un réel de I.
La fonction F définie sur I par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f ; c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Démonstration dans le cas où f est croissante (Le cas général est admis).

Soit $x_0 \in I$ et h un réel tel que $x_0+h \in I$.

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{x_0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ par Chasles.}$$

• *Premier cas :* $h>0$. *Comme f est croissante,* $\forall t \in [x_0, x_0+h]$, on a $f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0+h)$. *En intégrant cette relation, par la propriété de conservation de l'ordre quand les bornes sont dans le bon sens, on obtient*

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0+h)\,\mathrm{d}t \text{ càd } h\,f(x_0) \leq F(x_0+h)-F(x_0) \leq h\,f(x_0+h) .$$

En divisant par $h>0$, *on a* $f(x_0) \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq f(x_0+h)$. *Comme* f *est continue en* x_0 , $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$ *et grâce au théorème des gendarmes, on en déduit* $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$.

• *Deuxième cas :* $h<0$, *comme f est croissante,* $\forall t \in [x_0+h, x_0]$, on a $f(x_0+h) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0)$.
En intégrant cette relation, par la propriété de conservation de l'ordre quand les bornes sont dans le bon sens (Attention ! Avec $h<0$, *on a* $x_0+h<x_0$ *), on obtient*

$$\int_{x_0+h}^{x_0} f(x_0+h)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{x_0+h}^{x_0} f(x_0)\,\mathrm{d}t \text{ càd } -h\,f(x_0+h) \leq -[F(x_0+h)-F(x_0)] \leq -h\,f(x_0) .$$

En divisant par $-h>0$, *on a* $f(x_0+h) \leq \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leq f(x_0)$ *Comme* f *est continue en* x_0 , $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$ *et grâce au théorème des gendarmes, on en déduit* $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$.

• *Finalement,* $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$ *donc* $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$ *ce qui prouve que F est dérivable en* x_0 *avec* $F'(x_0)=f(x_0)$.

Remarque : On a donc prouvé que toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I mais cela ne veut pas dire que seules les fonctions continues ont des primitives: il existe des fonctions non continues qui en admettent aussi. Par exemple, on peut prouver (*faites-le!*) que la fonction F définie par $\begin{cases} F(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x\neq 0 \\ F(0)=0 \end{cases}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle a pour dérivée fonction définie par $\begin{cases} f(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$. Or f n'est pas continue en 0 (*prouvez-le*) et pourtant elle admet F comme primitive.

B. Les primitives donnent une méthode très efficace de calcul d'intégrales

On déduit de P5 le résultat suivant, probablement le plus important du chapitre :

Théorème fondamental du calcul intégral 6.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b et soit F une primitive quelconque de f. On a alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Pratique : Il suffit donc d'être capable de trouver une primitive de f pour pouvoir calculer l'intégrale ! Cela vaut vraiment le coup de connaître le tableau donnant les primitives des fonctions usuelles, non ?

Notation : La différence $F(b) - F(a)$ peut se noter $[F(x)]_a^b$. On rédige donc souvent les calculs sous la forme $\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ ce qui permet d'indiquer la primitive utilisée. Par exemple on écrit $\int_2^6 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_2^6 = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3$.

Limites de la méthode : Évidemment il n'est pas possible d'utiliser cette méthode de calcul d'intégrale lorsque l'on ne connaît pas de primitive explicite (= exprimable avec les fonctions usuelles) de la fonctions à intégrer. C'est le cas, par exemple de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ étudiée rencontrée dans l'utilisation de la loi normale (On s'est contenté de valeurs approchées de l'intégrale).

III. Application : Les ROC qu'on avait dû laisser de côté faute des outils mathématiques nécessaires

1. L'espérance de la loi normale vaut zéro

Propriété [7]. Espérance d'une loi normale centrée réduite

Si une variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite, alors son espérance est $E(Z) = 0$ (d'où le qualificatif « ***centrée*** ») ;

Elle est définie par $E(Z) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to -\infty} \int_x^0 t\,\phi(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{y \to +\infty} \int_0^y t\,\phi(t)\,\mathrm{d}t$ avec $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

2. Loi normale :Intervalles centrés sur la moyenne de probabilité donnée

Propriété [8]. [ROC!]
Soit Z une v.a. qui suit une loi normale centrée réduite et soit $e \in]0;1[$. Il existe un unique nombre strictement positif u_e tel que $P(-u_e \leqslant Z \leqslant u_e) = 1 - e$

Sources : Cours de Labomaths, cours de M. Reiss-Barde, manuel Transmaths, manuel Math'x, manuel Repères.

Table des matières