Intégrales, Partie I (sans les primitives) — T.S.

Objectifs : *Liste à cocher au fur et à mesure de vos révisions*

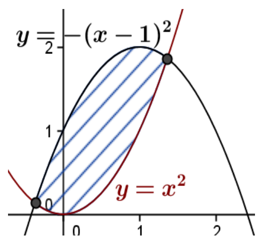
- ☐ Savoir interpréter une intégrale comme une aire algébrique (=avec un signe)
- ☐ Méthode des rectangles : Savoir écrire une intégrale comme la limite d'une somme d'aire de rectangles et réciproquement, savoir interpréter la limite d'une somme d'aire de rectangles comme une intégrale.
- ☐ Connaître et savoir utiliser les propriétés de l'intégrale : Positivité de l'intégrale, Relation de Chasles, linéarité, conservation de l'ordre.
- ☐ Savoir intégrer les relations de comparaisons pour établir des inégalités (et y penser!).
- ☐ TICE : Savoir calculer la valeur approchée d'une intégrale à l'aide de la calculatrice.

Parents, répétiteurs, grandes sœurs, camarades bien intentionnés...etc : Le calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive ne fait PAS partie de ce chapitre : Cette méthode est donc PROSCRITE POUR LE MOMENT et ce jusqu'à ce que nous ayons traité le chapitre sur les primitives.

Table des matières

Introduction :

Les intégrales servent essentiellement à faire des **calculs d'aire** et, plus tard, de volume. En effet, il faut bien reconnaître que pour le moment vous ne savez pas calculer l'aire de grand-chose : Disques, rectangles, triangles, parallélogrammes. Avec ces outils on ne voit pas par exemple comment calculer l'aire comprise entre les deux paraboles de la figure ci-contre (aire hachurée). Les intégrales vont donner un moyen de **calculer des aires délimitées par des courbes de fonctions**.



De plus nous verrons que certains **calculs de probabilités** peuvent s'interpréter comme des aires (loi uniforme, loi normale, loi exponentielle que nous verrons plus tard) donc comme des intégrales. Pour savoir comment manipuler et calculer ces probabilités nous aurons besoin des propriétés des intégrales.

Il n'est pas possible de calculer la valeur exacte de certaines intégrales et pour celles-là on trouvera une valeur approchée à la calculatrice. Pour les autres, nous verrons dans le chapitre « Intégrales et primitives » comment obtenir leur valeur exacte par une méthode liée aux dérivées.

Dans tout ce chapitre, on travaillera dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan et toutes les fonctions envisagées seront continues.

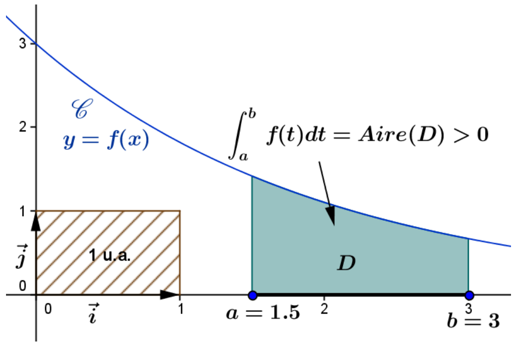
I. Définition de l'intégrale d'une fonction continue

A. Intégrale d'une fonction continue

Dans tout ce paragraphe, f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ (*ce qui sous-entend* $a \leqslant b$) et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Cas d'une fonction continue et positive

Définition 1. Si f est continue et positive sur $[a;b]$, on appelle ***intégrale de a à b de la fonction f***, et on note $\int_a^b f(t)\,dt$, le réel mesurant l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine D du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$ (*en vert sur le dessin*).



Remarques :

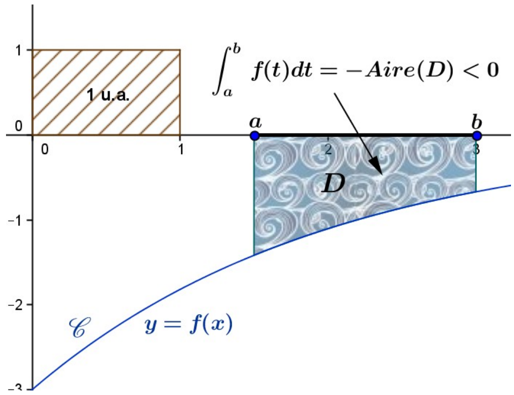
- On dit que a et b sont les ***bornes*** de l'intégrale.
- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ se lit : "*intégrale (ou somme) de a à b de f(t)dt* ".
- La variable t est appelée ***variable "muette"***, ce qui veut dire que l'on peut remplacer t par n'importe quelle autre variable : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (*hachuré sur le dessin*). Par exemple, si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe (Ox) et 3 cm sur l'axe (Oy) , alors l'unité d'aire est 6 cm^2.
- On peut calculer l'intégrale par la « méthode des rectangles », voir TD.

♠ Exemple 1. Quelque soient les réels a, b, k avec $k>0$ et $a \leqslant b$, $\int_a^b k\,\mathrm{d}x = \dots.$

Le domaine D est alors un . . . . .

2. Cas d'une fonction continue et négative

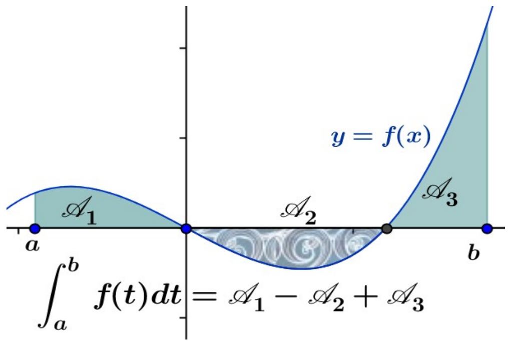
Définition 2. Si f est continue et négative sur $[a;b]$, on appelle ***intégrale de a à b de la fonction f***, et on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **l'opposé** de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ (*rempli par des vagues sur le dessin*).



3. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Définition 3. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle ***intégrale de a à b de la fonction f***, et on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ comptée positivement lorsque $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses et négativement lorsque $\mathscr{C}$ est au-dessous.



L'intégrale est une aire ***algébrique***, càd une aire avec un signe : On compte positivement les aires situées au-dessus de l'axe des abscisses et négativement les les aires situées en dessous.

II. Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue

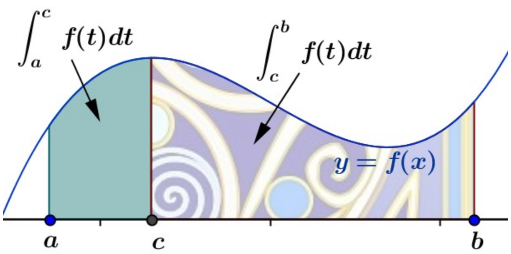
[P4] Linéarité de l'intégrale. *(admis)*
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$. Alors quels que soient les réels α et β, on a $\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

[P5] Relation de Chasles. *(admis)*
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Quels que soient les réels a, b et c éléments de I, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Corollaire : $\forall a\in I$, $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$

Dans le cas d'une fonction positive, avec $a<b<c$, la relation de Chasles traduit juste l'additivité des aires.



<u>Autre corollaire</u> : La relation de Chasles impose la définition de l'intégrale d'une fonction continue lorsque les bornes sont dans le « mauvais » ordre (càd lorsque la plus grande des deux bornes est en bas) : Pour que la relation de Chasles reste valable quelques que soient les bornes, on doit nécessairement avoir $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$. *Cela impose la définition suivante :*

Définition 6. Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.
On définit $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$ *(bornes dans le « mauvais » ordre)* par $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t\overset{\text{def}}{=}-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

<u>Remarque</u> : On retrouve la même idée que pour les vecteurs pour lesquels on a $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ *et* $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$, *et pour la même raison : C'est le seul choix possible si on veut que la relation de Chasles soit respectée dans tous les cas. Idem pour les angles orientés pour lesquels la relation de Chasles impose* $(\vec{u},\vec{u})=0$ *et* $(\vec{v},\vec{u})=-(\vec{u},\vec{v})$.

[P7] Positivité de l'intégrale.
Soient a et b deux réels d'un intervalle I et soit f une fonction continue sur I.

Si $a<b$ ET si $\forall x\in[a,b]$, $f(x)\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$.

« A condition que les bornes soient dans le bon sens, l'intégrale d'une fonction positive est un nombre positif. »

Corollaire (pourquoi est-ce un corollaire?):

[P8] Conservation de l'ordre.
Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.

Si pour tout x de $[a,b]$, $f(x)\leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

« A condition que les bornes soient dans le bon sens, l'intégrale conserve les inégalités. »

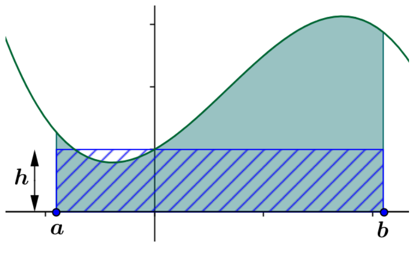
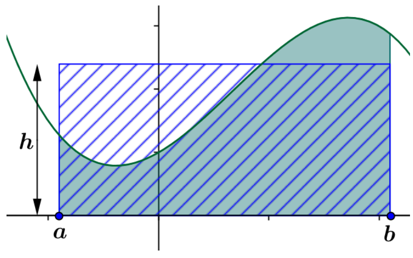
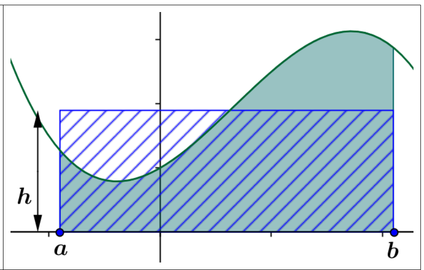
Corollaire :

[P9] Inégalité de la moyenne.
Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Soient m et M deux réels tels que $\forall x\in[a,b]$, $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

D'après P8, en intégrant la relation précédente, on a alors $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$.

III. Valeur moyenne d'une fonction continue

Le problème : Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On souhaite déterminer la hauteur (algébrique) du rectangle de base $[a, b]$ pour que l'aire (algébrique) du rectangle et l'aire (algébrique) sous la courbe soient égales. Le nombre solution du problème s'appelle *valeur moyenne de la fonction sur [a, b]* et il est noté μ .

		
Aire du rectangle < Aire sous la courbe. $h<\mu$	Aire du rectangle > Aire sous la courbe. $h>\mu$	Aire du rectangle = Aire sous la courbe. C'est notre solution !! $h=\mu$

Sa solution :

Définition 10. Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

On appelle ***valeur moyenne de f sur* [*a*, *b*]** le nombre $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C'est la hauteur (algébrique) d'un rectangle de base [*a*, *b*] ayant la même aire (algébrique) que l'aire (algébrique) sous la courbe de *f*.

Remarque : Partons de l'inégalité de la moyenne et faisons le lien avec la valeur moyenne de la fonction.

Dans le cas où $a<b$, en divisant tous les termes de $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$ par $b-a$ (*l'inégalité est conservée puisque* $b-a>0$), on obtient $m\leqslant\mu\leqslant M$, autrement dit la valeur moyenne de la fonction est comprise entre le maximum et le minimum de la fonction. Ce résultat n'a rien d'époustouflant en soi compte tenu de l'interprétation de la valeur moyenne mais il explique pourquoi l'inégalité de la moyenne s'appelle ainsi : Elle donne un encadrement de la valeur moyenne de la fonction (par le maximum et le minimum de la fonction.)