# Exercices : *Intégrales Sans les Primitives* | T S

- Vos calculatrices calculent des valeurs approchées des intégrales et permettent de les visualiser (voir rabats de couverture du livre Déclic).
- Les logiciels de calcul formel donnent la valeur exacte de la plupart des intégrales. Le logiciel Xcas est gratuit ; vous pouvez le télécharger ou l'utiliser en ligne à www.xcasenligne.fr (Cliquez sur la baguette magique et l'assistant vous guidera).
- Parents, répétiteurs : Ne faites pas ces exercices à l'avance, nous les ferons en classe et pour le moment, pas de primitives SVP !

○ Exercice ISP 1. Activité d'introduction

Soit $\mathscr{A}$ la partie du plan délimitée par la courbe représentative de la fonction exponentielle, l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=1$ . Par la méthode des rectangles, déterminer $\mathscr{A}$ .

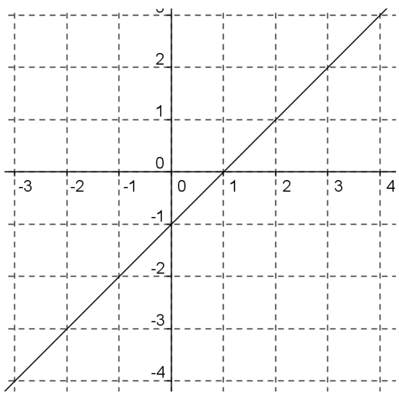
*Illustration : [Voir fichier Geogebra sur le site des Mathématoqués].*

*On pourra vérifier la valeur obtenue et visualiser à la calculatrice (voir rabats de couverture du livre Déclic).*

*Vérification avec Xcas : integrate(e^x,x,0,1)*

○ Exercice ISP 2. Calculer $I=\int_1^4 (3x-1)\,\mathrm{d}x$ et $J=\int_1^4 (3t-1)\,\mathrm{d}t$ . *On pourra vérifier à la calculatrice.*

○ Exercice ISP 3. La représentation graphique de la fonction affine $f$ est donnée ci-contre.



**1)** Calculer $\int_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ .

**2)** En déduire $\int_{-3}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ .

*On pourra vérifier les valeurs obtenues et visualiser les intégrales à la calculatrice (voir rabats de couverture du livre Déclic).*

○ Exercice ISP 4. Sachant que $\int_4^7 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$ et que $\int_4^7 g(x)\,\mathrm{d}x=-2$ , calculer a= $\int_4^7 f(t)\,\mathrm{d}t$ , b= $\int_7^4 f(s)\,\mathrm{d}s$ , c= $\int_4^7 f(t)\,\mathrm{d}x$ , d= $\int_4^7 f(x)\,\mathrm{d}t$ , e= $\int_4^7 6f(t)\,\mathrm{d}t$ et k= $\int_4^7 2f(x)-\frac{4g(x)}{3}\,\mathrm{d}x$ .

○ Exercice ISP 5. Prouver par des considérations géométriques que $\int_{-4}^{4} x^3\,\mathrm{d}x=0$ .

○ Exercice ISP 6. Calculer $\int_{-3}^{1} (-x+1)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{1}^{2} (x-1)\,\mathrm{d}x$ puis en déduire $\int_{-3}^{2} |x-1|\,\mathrm{d}x$ et $\int_{2}^{-3} |x-1|\,\mathrm{d}x$ .

○ Exercice ISP 7. A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-contre.

*X Cas* donne :

| | |
|---|---|
| integrate(x^2,x,-2,4) | |
| | 24 |
| integrate(x^3,x,-2,4) | |
| | 60 |

*(Ma calculatrice donne aussi ces valeurs. Et la vôtre?)*

**1)** Traduire ces résultats à l'aide d'intégrales

**2)** En déduire $I=\int_{-2}^{4} x^3+x^2\,\mathrm{d}x$ , $J=\int_{-2}^{4} 2x^3-3x^2\,\mathrm{d}x$ et

$K=\int_{-2}^{4} -x^3+2x^2+2\,\mathrm{d}x$ .

○ Exercice ISP 8. On admet que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$ . Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x$ et en déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$ .

○ Exercice ISP 9. On considère la suite S de terme général $S_n=\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(3\frac{k}{n}-2\right)$ . Calculer la limite de $(S_n)$ de deux façons : directement puis en commençant par exprimer cette limite comme une intégrale.

*On pourra vérifier la valeur obtenue et visualiser à la calculatrice (voir rabats de couverture du livre Déclic).*

Ne faites pas ces exercices à l'avance, nous les ferons <u>en classe</u>. Trouvez-en d'autres pour vous entraîner !
Chers répétiteurs, les professionnels ont leur matériel : j'utilise mes exercices, utilisez les vôtres.

◯ Exercice ISP 10. Suites définies par une intégrale

**1)** Prouver que pour tout entier naturel $n$ non nul, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**2)** Au moyen de la méthode des rectangles, en déduire la valeur de $I = \int_0^1 x^2 \, dx$.

**3)** Soit $(S_n)$ la suite définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\left[3\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 5\left(\frac{k}{n}\right) + 2\right]$ càd

$$S_n = \frac{1}{n}\left[3\left(\frac{0}{n}\right)^2 - 5\left(\frac{0}{n}\right) + 2\right] + \frac{1}{n}\left[3\left(\frac{1}{n}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{n}\right) + 2\right] + \frac{1}{n}\left[3\left(\frac{2}{n}\right)^2 - 5\left(\frac{2}{n}\right) + 2\right] + \ldots + \frac{1}{n}\left[3\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 - 5\left(\frac{n-1}{n}\right) + 2\right].$$

**a)** Écrire un algorithme permettant de calculer $S_n$ pour une valeur de $n$ choisie par l'utilisateur.
**b)** Que peut-on prévoir pour les valeurs fournies par cet algorithme lorsque $n$ devient très grand ?

◯ Exercice ISP 11. Dans un repère orthonormé, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de la fonction carré, l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=1$ est de $12\,cm^2$. Quelles sont les unités utilisées pour graduer les axes de ce repère ? *On admet que* $\int_0^1 s^2 \, ds = \frac{1}{3}$.

◯ Exercice ISP 12. Soient $f$ et g les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$ et $g(x) = e^{-x}$. Soit $\mathscr{A}$ la partie du plan située entre les courbes représentatives de $f$ et $g$ pour $x \in [0;5]$.
**1)** Exprimer $\mathscr{A}$ avec des intégrales puis comme une seule intégrale.
**2)** Au moyen de la calculatrice, donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$ à $10^{-2}$ u.a. (unité d'aire) près.

◯ Exercice ISP 13. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Hyunoo a calculé au moyen de Xcas en ligne (www.xcasenligne.fr) la valeur exacte de l'aire A de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Il a aussi calculé avec Xcas le nombre B= $\int_0^{1/2} f(x) \, dx$. Au moment où il s'apprêtait à calculer C= $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} f(x) \, dx$, D= $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{-1/2} f(x) \, dx$ et E= $\int_{-1/2}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{f(x)}{3} - 2\pi \, dx$, une coupure de courant interrompt son travail. Après avoir allumé une lampe à pétrole et maudit la Sénélec, Hyunoo trace la courbe représentative de $f$ sur sa calculatrice puis il a une idée pour finir les calculs à la main.

**1)** Profitez d'un moment où les dieux de la Senelec vous sont favorables pour déterminer la valeur exacte de l'aire A et celle du nombre B au moyen d'un logiciel de Xcas. (www.xcasenligne.fr)

**2)** Comment Hyunoo fait-il pour calculer C, D et E et quelle est la valeur exacte de ces intégrales ?

◯ Exercice ISP 14. Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies et continues sur $[-5;2]$. On sait que pour tout $x \in [-5;2]$, $-1 \leq f(x) \leq 2$ et $2 \leq g(x) \leq 5$.
**1)** En déduire un encadrement de $f+g$ sur $[-5;2]$.
**2)** Déterminer un encadrement de $2f - 3g$ sur $[-5;2]$.
**3)** En déduire un encadrement de $\int_{-5}^{2} f(x) + g(x) \, dx$ et un encadrement de $\int_{-5}^{2} 2f(x) - 3g(x) \, dx$.

◯ Exercice ISP 15. Encadrement d'intégrale. Montrer que pour tout $x \in [0\,;1]$, $\frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2$. En déduire un encadrement de $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} \, dx$. *On admet que* $\int_0^1 s^2 \, ds = \frac{1}{3}$.

◯ Exercice ISP 16. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \int_n^{n+1} \frac{3e^t}{1+e^t} \, dt$.

◯ Exercice ISP 17. Encadrement d'intégrale.

Montrer que $\forall x\in[0\ ;1], 0\leq x(1-x)\leq\frac{1}{4}$. En déduire que $0\leq\int_0^1 x^5(1-x)^5\,\mathrm{d}x\leq 10^{-3}$.

◯ Exercice ISP 18. Suites définies par une intégrale

**1)** Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout $x\in[0\ ;1], m\leq f(x)\leq M$. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n=\int_0^{1/n} f(t)\,\mathrm{d}t$.

**2)** Déterminer la limite de la suite de terme général $v_n=\int_0^{1/n}\frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s$ puis celle de la suite de terme général $w_n=\int_0^{1/n} 3n-1+\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

◯ Exercice ISP 19. Méthode des rectangles

*On admet que pour tout entier* $n\neq-1$, *on a* $\int_a^b t^n\,\mathrm{d}t=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$. Exprimer la limite de chacune des sommes suivantes comme une intégrale puis en donner une valeur exacte à l'aide de la formule ci-dessus. $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2-\frac{3k}{n}+5\right)$ ; $\bar{S}_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\left(6\left(\frac{k}{n}\right)^5+5\right)$

◯ Exercice ISP 20. Partie entière

La ***partie entière*** d'un réel *x*, notée $\mathrm{E}(x)$ est par définition le plus grand nombre entier inférieur ou égal à *x*. Par exemple, $\mathrm{E}(2{,}3)=2$, $\mathrm{E}(7)=7$, $\mathrm{E}(8{,}9)=8$, $\mathrm{E}(-2{,}75)=-3$ et $\mathrm{E}(-5{,}6)=-6$. La définition peut se traduire par : $\forall x\in\mathbb{R}, \mathrm{E}(x)\leqslant x<\mathrm{E}(x)+1$ et $E(x)\in\mathbb{Z}$.

Calculer $a=\int_0^4 E(t)\,\mathrm{d}t$, $b=\int_4^0 E(x)\,\mathrm{d}x$, $c=\int_{-20}^{19} E(s)\,\mathrm{d}s$, $d=\int_0^1 x-E(x)\,\mathrm{d}x$ *et* $e=\int_{-10}^{100} x-E(x)\,\mathrm{d}x$.

*Partie entière et calculatrices : TI83Plus.fr : ent(x) / TI89 : floor(x) / Casio : Intg(x) dans le catalogue ou OPTN-->NUM--> Intg*

◯ Ex 97 p 208

*Rendons à César...: Beaucoup d'exercices reprennent des idées de M Mugnier. Merci à lui !*

Soit $f$ la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x)=x\,e^{x}$ . On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ .
Soit a un nombre appartenant à l'intervalle $[0;1]$ .
Sur la courbe $\mathscr{C}$ tracée en annexe, on a placé les points A et B d'abscisses respectives $a$ et 1. On a tracé les segments [OA] et [AB]. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments [OA] et [AB] et la courbe $\mathscr{C}$ . On a placé les points $A'(a;0)$ et $B'(1;0)$ .

**Partie A**

On admet que $\int_0^1 x\,e^{x}\,dx=1$ .

**1)** Calculer l'aire du triangle OAA' et montrer que l'aire du trapèze ABB'A' est égale à $\frac{1}{2}(-a^2e^a+a\,e^a-a\,e+e)$ .

**2)** En déduire que l'aire de la partie hachurée est $\frac{1}{2}(a\,e^a-a\,e+e-2)$ .

**Partie B**

Soit $g$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=x(e^x-e)+e-2$ .

**1) a)** Soit $g'$ la fonction dérivée de $g$ . Calculer $g'(x)$ pour tout réel $x\in[0;+\infty[$ .
**b)** Vérifier que $g''$ est définie sur $[0;+\infty[$ par $g''(x)=(2+x)e^x$ .

**2)** En déduire les variations de $g'$ sur $[0;+\infty[$ .

**3)** Établir que l'équation $g'(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $[0;+\infty[$ . Déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ près.

**4)** En déduire les variations de $g$ sur $[0;+\infty[$ .

**5)** En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de *a* pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale. Donner cette valeur de *a*.