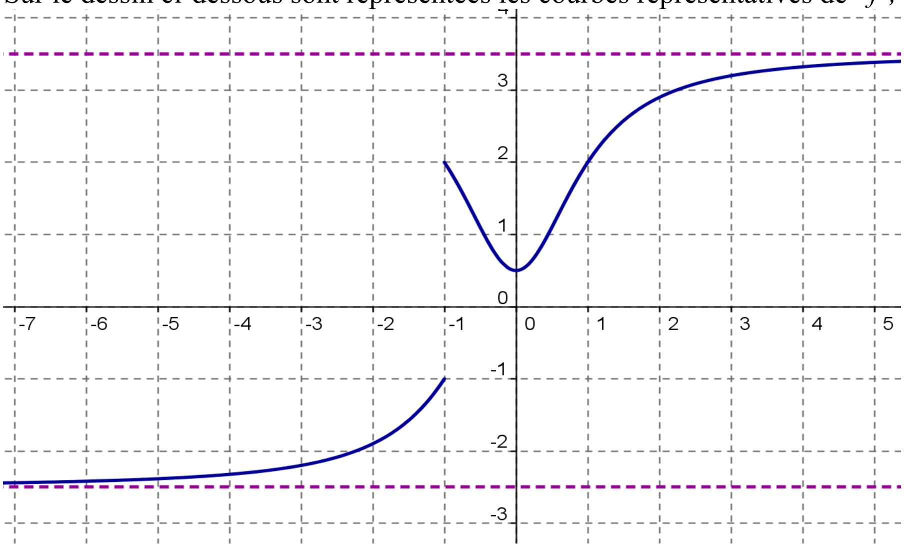
Limites et comportement asymptotique — T.S.

Introduction : Notion intuitive de limites (finies et infinies, en un point et à l'infini) sur des exemples.

Étudier la limite de $f(x)$ [*qui se lit comme toujours sur l'axe des ordonnées*] lorsque x se rapproche d'un nombre fini ou de $+\infty$ ou de $-\infty$ [*ce que l'on visualise sur l'axe des abscisses*], c'est se demander si la fonction a une « valeur limite ».
La différence avec les limites de suites est que x peut tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$ ou vers une valeur finie alors que dans le cas des limites de suites, n tendait toujours vers $+\infty$.

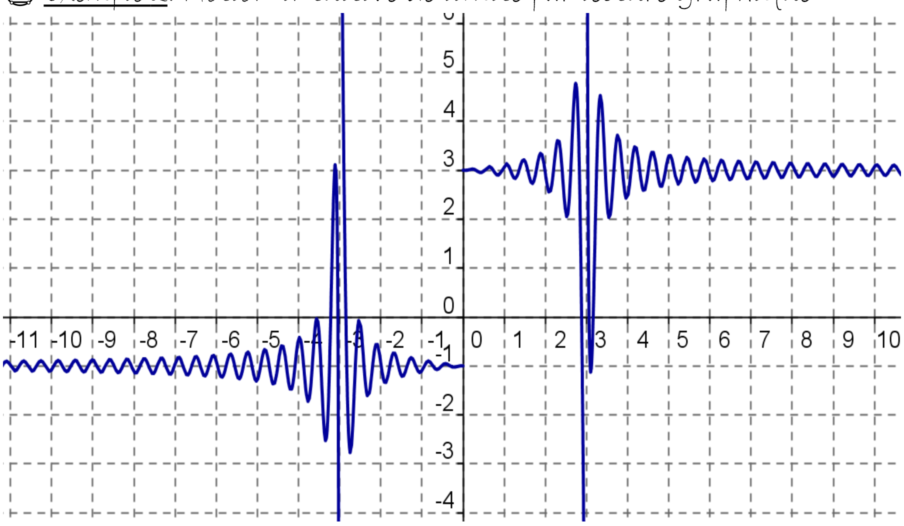
❍ Exemple 1. Notion intuitive de limite par lecture graphique
Sur le dessin ci-dessous sont représentées les courbes représentatives de f, de $y=3{,}5$ et de $y=-2{,}5$.



Compléter :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ldots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ldots$
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=\ldots$
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=\ldots$

❍ Exemple 2. Notion intuitive de limite par lecture graphique



Compléter :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ldots$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ldots$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\ldots$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=\ldots$

❍ Exemple 3. Limites des fonctions usuelles Au besoin, dessinez leurs graphes !

1) $\lim\limits_{x\to3} x^2=\ldots$ **2)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=\ldots$ **3)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=\ldots$ **4)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \sin x=\ldots$ **5)** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x}=\ldots$

♠ Exemple 4. Limites des fonctions usuelles Au besoin, dessinez leurs graphes !

1) $\lim\limits_{x\to0} e^x=\ldots$ **2)** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=\ldots$ **3)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=\ldots$ **4)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x=\ldots$ **5)** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x}=\ldots$

Pratique [Les idées essentielles]. Pour calculer une limite :

Pour calculer une limite **on commence toujours par regarder si c'est une forme indéterminée** ou non. (*Les formes indéterminées*[1] *sont:* $\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0\times\infty$, 0^0 *et* 1^∞).

■ Si ce n'est PAS une forme indéterminée, il n'y a rien à faire de plus. On évoque si nécessaire, un théorème « par somme », « par produit », « par composition » et on donne la valeur de la limite.

■ Si par contre c'est une forme indéterminée,

- on peut transformer l'expression pour *lever l'indétermination* en **factorisant**, en **simplifiant**, en utilisant **l'expression conjuguée s'il y a des racines carrées**…etc jusqu'à obtenir une forme qui n'est pas indéterminée.
- On peut aussi, comme pour les suites, utiliser le **théorème des gendarmes** ou un **théorème de comparaison**.
- Dans le cas d'une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$, on peut essayer de **reconnaître la limite d'un taux de variations** et interpréter la limite comme une dérivée en un point. En effet, si f est dérivable en a , $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ (On passe d'une formule à l'autre en faisant le changement de variable $x=a+h$ ou $h=x-a$).

Exemple 5. [Limite à connaître!] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\ldots$

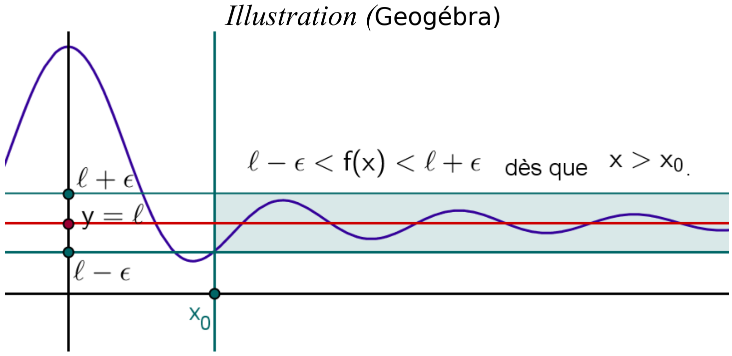
I. Limites lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

A. Limite *finie* lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$: On a une asymptote horizontale

1. Définitions

Définition 1. [Formulation TS]
ℓ étant un réel (un nombre fini), on dit que la fonction f ***a pour limite*** ℓ ***lorsque x tend vers*** $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient $f(x)$ dès que x est assez grand (càd lorsque x dépasse une certaine valeur, notée x_0 sur le graphique ci-contre).
On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.

Illustration (Geogébra)



[Formulation du supérieur] ℓ étant un réel (un nombre fini), on dit que la fonction f a pour limite ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ si $\forall\varepsilon>0\ \exists x_0$ tel que $x>x_0\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon$. (ε se lit *Epsilon*)

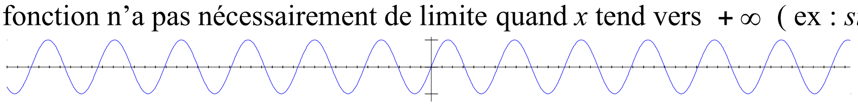
C'est bien sûr la même définition, puisqu'il suffit que la propriété soit vraie pour les intervalles ouverts contenant ℓ de la forme $]\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon[$, avec $\varepsilon>0$.

Important !

Définition 2. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (ℓ étant un nombre fini), on dit alors que la droite d'équation $y=\ell$ est une ***asymptote horizontale*** pour la courbe C_f lorsque x tend vers $+\infty$.

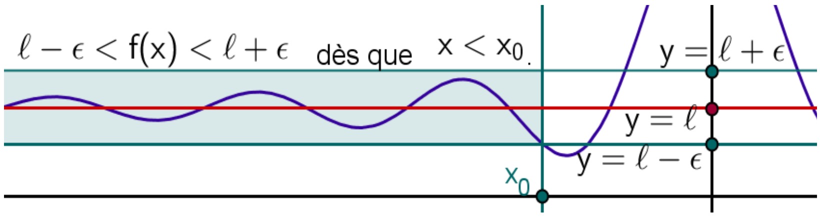
On a une asymptote **horizontale** si $f(x)$ a limite **finie** quand x tend vers une valeur **infinie**.

Remarque : Une fonction n'a pas nécessairement de limite quand x tend vers $+\infty$ (ex : *sin x*).



1 *Ce sont évidemment les mêmes que dans la chapitre sur les limites de suites.*

■ On a des définitions semblables quand x tend vers $-\infty$:



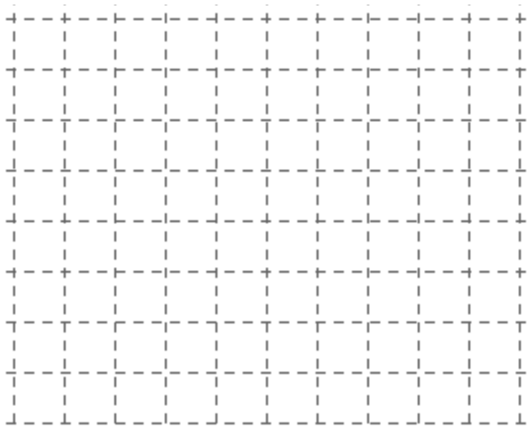
Définition 3. Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$ (ℓ étant un nombre fini), on dit alors que la droite d'équation $y=\ell$ est une **asymptote horizontale** pour la courbe C_f lorsque x tend vers $-\infty$.

Exemple 6.

1) Dessiner ci-contre le graphe d'une fonction ayant toutes les caractéristiques suivantes :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$ donc sur la figure ci-contre, C_f a pour asymptote horizontale la droite d'équation $y=-3$ lorsque x tend vers $-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.
- f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

2) Une telle fonction est-elle unique ? Si non, dessiner une deuxième solution.



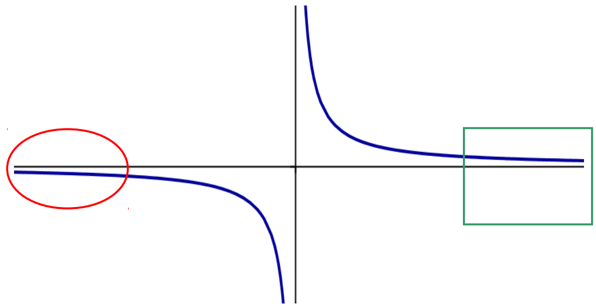
2. Quelques limites à connaître

P 4. Limites à connaître

▪ Inverse :

$$\boxed{\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}=0} \quad \text{et} \quad \lim_{X\to-\infty}\frac{1}{X}=0$$

Ces limites se lisent sur le graphe de la fonction inverse (voir ci-contre).



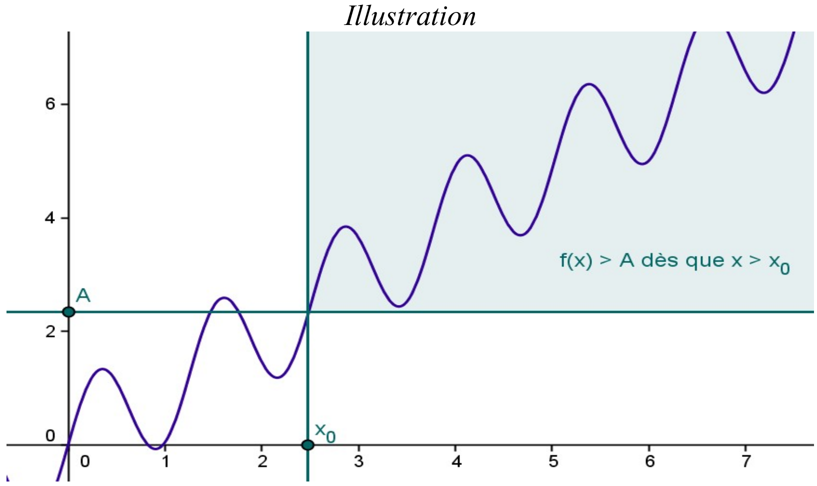
▪ Exponentielle : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ *Ces limites se lisent sur le graphe de la fonction exponentielle (que vous connaissez par cœur !).*

B. Limite *infinie* lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

1. Définitions

Définition 5. [Formulation TS]
On dit que la fonction f ***a pour limite* $+\infty$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$** si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient $f(x)$ dès que x est assez grand (càd lorsque x dépasse une certaine valeur, notée x_0 sur le graphique ci-contre).
On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Illustration



[Formulation du supérieur] On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si $\forall A>0\ \exists x_0$ tel que $x>x_0 \Rightarrow f(x)>A$. *(L'idée essentielle est que x_0 dépend de A)*

Remarque : Dans le cas d'une limite infinie quand x tend vers $+\infty$, la courbe C_f n'a PAS d'asymptote horizontale lorsque x tend vers $+\infty$.

On définirait de même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2. Quelques limites à connaître

P 6. Limites à connaître :

- Les fonctions $x\mapsto x$, $x\mapsto x^2$, $x\mapsto x^3$ et plus généralement $x\mapsto x^n$ avec $n\geqslant 0$, ainsi que $x\mapsto\sqrt{x}$ et $x\mapsto e^x$ ont pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. *On n'a pas besoin de l'apprendre par cœur, pensez aux courbes représentatives !*
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et son corollaire $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x=0$ *On dit que « l'exponentielle l'emporte sur x en $+\infty$ et $-\infty$. »*

> - En fait, « l'exponentielle l'emporte sur TOUS les polynômes en $-\infty$ et $+\infty$. » mais ce résultat n'est plus au programme.
> - Les démonstrations des deux limites sur l'exponentielle sont exigibles (ROC!)

Exemple 7. La courbe représentative de f définie par $f(x)=\dfrac{e^x-2x}{e^x+3x}$ a-t-elle des asymptotes horizontales ?

II. Limite quand x tend vers un réel (fini)

A. Limite *finie* lorsque *x* tend vers *a*

Pour étudier la limite de f en a quand x tend vers a, il faut que x puisse s'approcher de a en restant dans D_f. On va donc étudier la limite de f en a quand D_f contient un intervalle de la forme $]a, a+\alpha[$ ou $]a-\alpha, a[$. On suppose cette condition remplie dans tout ce qui suit.

Définition 7. [Formulation TS]
On dit que la fonction ***f a pour limite ℓ lorsque x tend vers a*** si tout intervalle ouvert contenant a contient $f(x)$ dès que x est assez proche de a.
On note $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$.

[Formulation du supérieur] On dit que la fonction f a pour limite ℓ lorsque x tend vers a si $\forall\varepsilon>0\ \exists\alpha>0$ tel que $|x-a|<\alpha\Rightarrow|f(x)-\ell|<\varepsilon$. (*L'idée essentielle est que* α *dépend de* ε.)

Notation: Si on se limite aux valeurs de x supérieures à a, on dit f a pour limite ℓ lorsque ***x tend vers a par valeurs supérieures*** et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\ell$ ou encore $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}a} f(x)=\ell$ ou encore $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\ell$. (« a^+ » pour « *a plus* un petit quelque chose »)

De même :

Notation: Si on se limite aux valeurs de x inférieures à a, on dit f a pour limite ℓ lorsque ***x tend vers a par valeurs inférieures*** et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\ell$ ou encore $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}a} f(x)=\ell$ ou encore $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\ell$. (« a^- » pour « *a moins* un petit quelque chose »)

Exemple 8. Avec $f(x)=\dfrac{|x|+3x^2}{x}$, évaluer : **1)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\dots$; **2)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\dots$; **3)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dots$

B. Limite *infinie* lorsque *x* tend vers a: On a une asymptote verticale.

1. Définitions

Définition 8. [Formulation TS]
On dit que la fonction f ***a pour limite*** $+\infty$ ***lorsque x tend vers a*** si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a).
On note $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

Illustration

[Formulation du supérieur] On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a si $\forall\, A>0\ \exists \alpha>0$ tel que $|x-a|<\alpha \Rightarrow |f|(x)>A$. *(L'idée essentielle est que* α *dépend de* A .)

Important !

Définition 9. Si f admet une limite infinie lorsque x tend vers a par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures (ou les deux) alors la droite d'équation $x=a$ est une ***asymptote verticale*** pour la courbe représentative C_f de f.

☞ On a donc une asymptote **verticale** si f(x) a limite **infinie** quand x tend vers une valeur **finie**. (par valeurs supérieures, ou par valeurs inférieures, ou les deux).

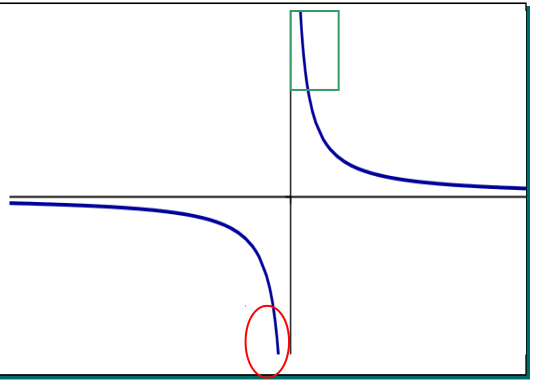
☞ Les seules valeurs de a pour lesquelles $x=a$ peut être asymptote **verticale** sont les **valeurs interdites**. Cependant il peut arriver que a soit une valeur interdite mais que $x=a$ ne soit pas asymptote verticale. (voir exemple 8). Pour savoir si $x=a$ est une asymptote verticale, il faut calculer la limite en a par valeurs supérieures et/ou inférieures.

2. Limites à connaître

P10. Limites à connaître[2] :

$\boxed{\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ X>0}} \dfrac{1}{X}=+\infty}$ qui s'écrit aussi $\lim\limits_{X\to 0^+} \dfrac{1}{X}=+\infty$;

$\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ X<0}} \dfrac{1}{X}=-\infty$ qui s'écrit aussi $\lim\limits_{X\to 0^-} \dfrac{1}{X}=-\infty$.



Ces limites se lisent sur le graphe de la fonction inverse (voir ci-contre).

○ Exercice 9. Déterminer toutes les asymptotes (horizontales et verticales) de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2e^x-7}{e^x-1}$ ainsi que le tableau de variations de f.

C. Application : Continuité et dérivabilité en un point

■ On peut reformuler la définition de la continuité en un point a intérieur à D_f , càd qu'un intervalle ouvert contenant a est contenu dans D_f .

D_f est continue en a intérieur à D_f ssi $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=f(a)$

■ La définition de la dérivabilité en un point passe elle aussi par un calcul de limite en un point.

○ Exemple 10. Étudiez la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie par $f(x)=x\sqrt{x}$ sur son domaine de définition.

2 *Pourquoi « X » au lieu de « x » dans cette formule ? juste pour vous rappeler qu'on pourra donc remplacer X dans la formule par n'importe quelle expression qui tend vers 0 en restant positive. Ce que dit cette formule, c'est que si « machin » tend vers 0 en restant positif, la limite de un sur « machin » est* $+\infty$.

III. Détermination de limites

A. Opérations algébriques sur les limites : Limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de fonctions

1. Limite d'une somme

Si f a pour limite	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si g a pour limite	ℓ'	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Rappel : Dire qu'une limite est une *forme indéterminée* signifie qu'il est possible que la limite soit finie ou infinie ou même qu'elle n'existe pas ! On ne peut pas le savoir avant de transformer l'expression pour lever l'indétermination en factorisant, simplifiant…etc.

2. Limite d'un produit

Si f a pour limite	ℓ	$\ell\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell=0$
et si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $f\times g$ a pour limite	$\ell\times\ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$ On le détermine par la règle des signes	$+\infty$ ou $-\infty$ On le détermine par la règle des signes	Forme indéterminée

3. Limite d'un inverse

Si f a pour limite	$\ell\neq 0$	$\ell=0$ par valeurs supérieures	$\ell=0$ par valeurs inférieures	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\dfrac{1}{f}$ a pour limite	$\dfrac{1}{\ell}$	$+\infty$ (par la règle des signes)	$-\infty$ (par la règle des signes)	0

4. Limite d'un quotient

$f\dfrac{(x)}{g}(x)=f(x)\times\dfrac{1}{g}(x)$ donc on obtient les limites de ce type en combinant les règles sur les inverses et celle sur les produits.

5. Bilan : Liste des formes indéterminées

P11. Liste des formes indéterminées : $\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0\times\infty$, 0^0 et 1^∞ .

Dans tous les autres cas, la limite est ce que l'intuition nous dit qu'elle devrait être. Il n'est donc pas nécessaire de mémoriser les tableaux ci-dessus.

B. Théorèmes de comparaison

■ Objectif : On voudrait déterminer la limite d'une fonction f lorsque x tend vers a , a pouvant être un réel $+\infty$ ou $-\infty$, en passant à limite dans une inégalité. (c.f. le théorèmes des gendarmes et les théorèmes de comparaison pour les suites)

■ Pour quels valeurs de x l'inégalité doit-elle être vérifiée ? (c'est le « voisinage » des théorèmes ci-dessous)

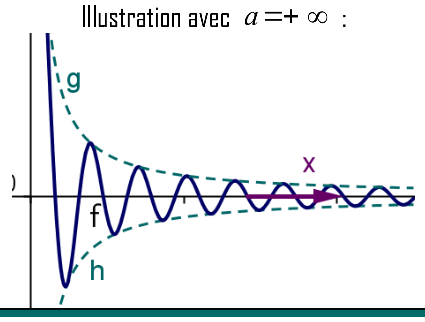
Pour passer à la limite dans une inégalité, il faut que cette inégalité soit valable au voisinage du point qui nous intéresse : Par exemple, si on cherche la limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ en $+\infty$, un encadrement de cette fonction valable pour tous les $x\in[3, 5]$ ou pour tous les $x<0$ ne nous sert à rien. Ce qu'il nous faut c'est une inégalité vérifiée sur un ensemble qui permet de s'approcher de $+\infty$, i.e. sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$.

En résumé,

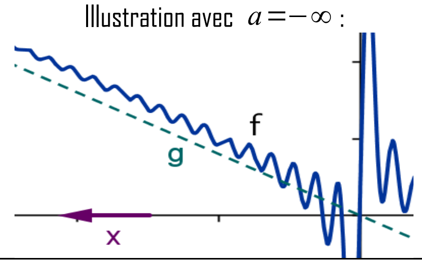
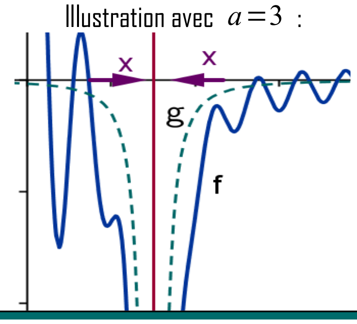
- si on veut passer à la limite quand x tend vers $+\infty$, il faut que l'inégalité soit valable sur un voisinage V de la forme $]A,+\infty[$.
- si on veut passer à la limite quand x tend vers $-\infty$, il faut que l'inégalité soit valable sur un voisinage V de la forme $]-\infty, A[$.
- si on veut passer à la limite quand x tend vers un <u>réel</u> a, il faut que l'inégalité soit valable sur un voisinage V de la forme $]a-\alpha, a+\alpha[$, α étant un nombre strictement positif.

■ **<u>P12</u>**. Limite et ordre: **Le passage à la limite respecte mais peut élargir les inégalités** :
Soient f et g des fonctions ayant une limite (finie ou non) en a et soit V un voisinage de a.
(1) Si $\forall x \in V,\ f(x) \leqslant g(x)$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to a} g(x)$
(2) Si $\forall x \in V,\ f(x) < g(x)$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to a} g(x)$

■ Les théorèmes:

<u>P13</u>. Théorèmes des gendarmes : S'il existe des fonctions g et h et un voisinage V de a tels que : • $\forall x \in V,\ h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ • $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$	alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.	Illustration avec $a=+\infty$: 

■ Dans le même genre, pour des limites infinies : Deux **théorèmes de comparaison** :

<u>P14</u>. S'il existe une fonction g et un voisinage V de a tels que : • $\forall x \in V,\ g(x) \leqslant f(x)$ • $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$	alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.	Illustration avec $a=-\infty$: 
<u>P15</u>. S'il existe une fonction g et un voisinage V de a tels que : • $\forall x \in V,\ f(x) \leqslant g(x)$ • $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$	alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.	Illustration avec $a=3$: 

◯ <u>Exemple 11</u>. ▣ **ROC**. Prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ en utilisant $g(x) = e^x - x$. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

◯ <u>Exemple 12</u>. Prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. Ex 16 p 130, utilisant $g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

◯ <u>Exemple 13</u>. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes. Traduire les résultats obtenus en terme d'existence ou non d'une asymptote.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} 7x + 5\cos^2 x$; **2)** $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \dfrac{-\cos(\pi x)}{x^2-1}$; **3)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x}$; **4)** $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \dfrac{\cos(\pi x)}{1+x}$; **5)** $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{-\cos(\pi x)}{x^2-1}$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - \cos(\pi x)}{x-1}$; **7)** $\lim\limits_{x \to -\infty} 8x - |2x + \cos(2x)|$; **8)** $\lim\limits_{x \to +\infty} 8x - |2x + \cos(2x)|$.

C. Limite d'une composée de deux fonctions (= quand on a une fonction à l'intérieur d'une autre)

On a déjà utilisé ce résultat pour dire par exemple que $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=0$, que $\lim_{x\to+\infty} e^{3x^2-6x+1}=+\infty$.

P16. Limites et composition : a, b et ℓ peuvent être soit des nombres soit $+\infty$ soit $-\infty$
Si $\lim_{x\to a} f(x)=b$ et si $\lim_{X\to b} g(X)=\ell$ alors $\lim_{x\to a} g(f(x))=\ell$.

Exemple 14. Déterminer, si elle existe, chacune des limites suivantes.

1) $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}$; **2)** $\lim_{x\to+\infty} e^{3x+1}-4e^{2x}$; **3)** $\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x^2-7x}{7x-3x^2}\right)$.

IV. Généralisation du théorème des valeurs intermédiaires.

P17. TVI généralisé. Le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire se généralisent au cas d'intervalles ouverts (i.e. de la forme $]a;b[$) ou semi-ouverts (i.e. de la forme $]a;b]$ ou $[a;b[$), bornés ou non (càd avec éventuellement une borne de l'intervalle égale à $-\infty$ ou $+\infty$) en remplaçant au besoin $f(a)$ et/ou $f(b)$ par les limites en a et b dans l'énoncé des théorèmes.

Chers parents et répétiteurs qui remplissez mes devoirs à la maison de théorèmes qui ne sont pas ou plus au programme,
Avez vous remarqué que

- *les limites de polynômes ou de quotients de polynômes en invoquent les termes de plus haut degré ne sont plus au programme ?*
- *les asymptotes obliques ne sont plus au programme ?*

Table of Contents

Demandez le programme

Limites de fonctions Limite finie ou infinie d'une fonction à l'infini. Limite infinie d'une fonction en un point. Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions. Limites et comparaison. Asymptote parallèle à l'un des axes de coordonnées.	• Déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions. • Déterminer des limites par minoration, majoration et encadrement. • Interpréter graphiquement les limites obtenues.	Le travail réalisé sur les suites est étendu aux fonctions, sans formalisation excessive. L'objectif essentiel est de permettre aux élèves de s'approprier le concept de limite, tout en leur donnant les techniques de base pour déterminer des limites dans les exemples rencontrés en terminale. La composée de deux fonctions est rencontrée à cette occasion, mais sans théorie générale.
Fonction exponentielle Fonction $x \mapsto \exp(x)$. Relation fonctionnelle, notation e^x.	▣ Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur **R**, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0. ▣ Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$. • Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. • Connaître le sens de variation et la représentation graphique de la fonction exponentielle. • Connaître et exploiter $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$.	La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction f dérivable sur **R** telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence est admise. On étudie des exemples de fonctions de la forme $x \mapsto \exp(u(x))$, notamment avec $u(x) = -kx$ ou $u(x) = -kx^2$ ($k > 0$), qui sont utilisées dans des domaines variés. On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 et la limite en 0 de $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$. ⇆ [SPC et SVT] Radioactivité. (AP) *Étude de phénomènes d'évolution.*

Mon brouillon :

Cet exercice résolu vise surtout à vous donner un exemple de rédaction.

♠ Exemple 15. (résolu) Evaluer $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{2x^3-7}{x-2}$.

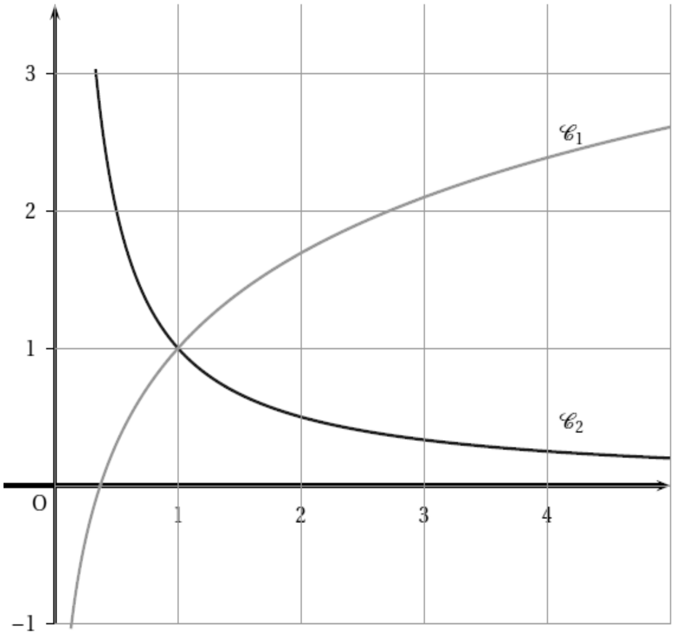
D'une part, $\lim\limits_{x\to 2} 2x^3 - 7 = 2\times 2^3 - 7 = 16 - 7 = 9$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to 2} x - 2 = 0$ *et si* $x < 2$ *alors* $x - 2 < 0$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{1}{x-2} = -\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{2x^3-7}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \left(2x^3 - 7\right)\frac{1}{x-2} = -\infty$.

♠ Exercice 16. (Extrait du bac S Pondichéry avril 2011) :

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes C_1 et C_2 représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$.



On sait que :

- l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes C_1 et C_2
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe C_2
- la fonction f_2 est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$
- la fonction f_1 est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$
- la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$ est $+\infty$.

Pour chacune des quatre questions de cette partie, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse juste rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'est pas sanctionnée.

1. La limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est :

a- 0 **b-** $+\infty$ **c-** On ne peut pas conclure

2. La limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est :

a- 0 **b-** 0,2 **c-** On ne peut pas conclure

3. En $+\infty$, C_1 admet une asymptote oblique :

a- Oui **b-** Non **c-** On ne peut pas conclure

4. Le tableau de signes de $f_2(x)-f_1(x)$ est :

a-

x	0		$+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	‖	+	

b-

x	0		$+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	‖	−	

c-

x	0		1		$+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	‖	+	0	−	

♠ Exercice 17.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-6x$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ par $g(x)=2x-\dfrac{16}{x}$.

On note C et Γ les courbes représentatives de f et g dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- Étudier la fonction f et tracer C.

2- a- Prouver que la courbe Γ a une asymptote oblique d dont vous donnerez une équation. Préciser la position de Γ par rapport à d.

b- Étudier la fonction g et tracer Γ.

3- a- Démontrer que les deux courbes C et Γ ont deux points communs A et B dont vous préciserez les coordonnées.

b- Démontrer que C et Γ admettent en A et B une tangente commune et ces tangentes communes sont parallèles.

♠ Exercice 18.

Tracer dans le repère ci-dessous, la courbe *(C)* représentative d'une fonction f dérivable telle que :

- f prend la valeur 1 en 0,
- $f'(0)=-\dfrac{2}{3}$
- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$
- l'équation $f(x)=0$ a pour ensemble de solution $S=\{-3;1;5\}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$
- le coefficient de la tangente à *(C)* est nul en 3 et $f(3)=-2$.