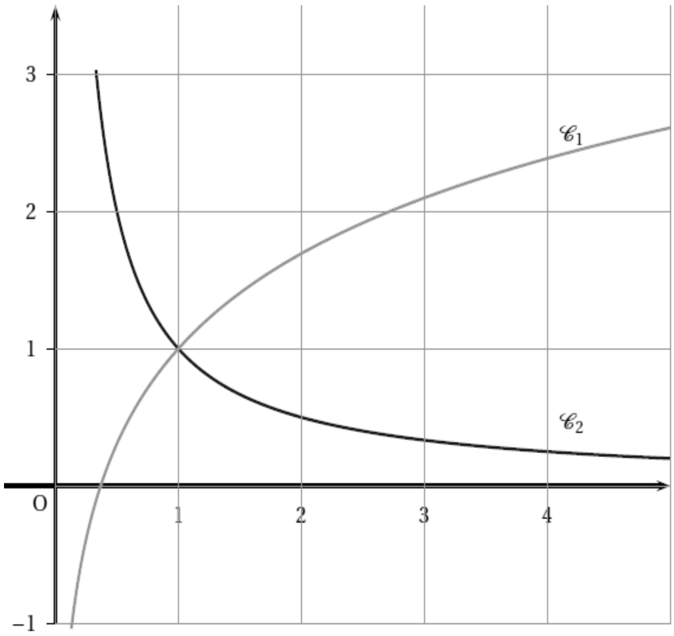
Exercices	Limites et comportement asymptotiques	TS

Pour des exercices de technique de calcul de limites, allez sur WIMS !

Exercice 1. (Extrait du bac S Pondichéry avril 2011)

Sur le graphique ci-contre, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes C_1 et C_2 représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$.



On sait que :

- l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes C_1 et C_2
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe C_2
- la fonction f_2 est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$
- la fonction f_1 est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$
- la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$ est $+\infty$.

Pour chacune des quatre questions de cette partie, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse juste rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'est pas sanctionnée.

1) La limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est :

a- 0 **b-** $+\infty$ **c-** On ne peut pas conclure

2) La limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est :

a- 0 **b-** 0,2 **c-** On ne peut pas conclure

3) Le tableau de signes de $f_2(x)-f_1(x)$ est :

a-

x	0	$+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	‖	$+$

b-

x	0	$+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	‖	$-$

c-

x	0		1		$+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	‖	$+$	0	$-$	

Exercice 2. **1)** $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+7x+3}{x+3}$; **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}-x$

Exercice 3. Déterminer, si elle(s) existe(nt), les asymptotes horizontales des courbes représentatives de chacune des fonctions suivantes ; préciser s'il s'agit d'une asymptote horizontale en $+\infty$ ou en $-\infty$ et préciser leur(s) équation(s).

1) $f(x)=\dfrac{12x-15x^2}{3x-3x^2}$; **2)** $f(x)=\dfrac{2x+\sqrt{4x^2+1}}{x}$.

Exercice 4. La fonction f définie sur $[2;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x-2}$ est-elle dérivable en 2 ?

Indication : utiliser la définition du nombre dérivé.

Exercice 5. *Déterminer, si elle existe, chacune des limites suivantes.*

1) $\lim\limits_{x\to 8} \sqrt{2}x-2\sqrt{x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3}-7x$; **3)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x+1}}{e^{2x}+4}$; **4)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x+1}}{e^{2x}+4}$; **5)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2}x-2\sqrt{x}$.

Exercice 6. L'exponentielle l'emporte sur les polynômes en + l'infini

On suppose connu (uniquement) le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}=+\infty$

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}, \dfrac{e^x}{x^n}=\left(\dfrac{1}{n}\times\dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$ et en déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$.

Exercice 7.

Tracer la courbe *(C)* représentative d'une fonction *f* dérivable telle que :

- *f* prend la valeur 1 en 0,
- $f'(0)=-\dfrac{2}{3}$
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty$
- l'équation $f(x)=0$ a pour ensemble de solution $S=\{-3;1;5\}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$
- le coefficient de la tangente à *(C)* est nul en 3 et $f(3)=-2$.

Exercice 8. *Déterminer, si elle existe, chacune des limites suivantes et traduire le résultat en terme d'existence ou non d'une asymptote horizontale.*

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-5\sqrt{x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}$; **3)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x+1}-4e^{2x}$; **4)** $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x-\cos(x^2)$.

Exercice 9. *Déterminer, si elle existe, chacune des limites suivantes.*

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+5\sqrt{x}}{x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x-7}}{e^{5x}}$; **3)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3}-x$.

Exercice 10. *Déterminer, si elle(s) existe(nt), les asymptotes horizontales des courbes représentatives de chacune des fonctions suivantes ; préciser s'il s'agit d'une asymptote horizontale en* $+\infty$ *ou en* $-\infty$ *et préciser leur(s) équation(s).*

1) $f(x)=\dfrac{-x^2+5\sqrt{x}}{8x^2}$; **2)** $f(x)=\dfrac{x^2+5\sqrt{x}}{x}$; **3)** $f(x)=\dfrac{2x+\sqrt{9x^2}}{-2x}$; **4)** $f(x)=\dfrac{e^x-2x}{e^x-x}$.

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^{5x}-1}{3x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=4$.

1) f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? **2)** f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 12. Montrer que pour tout réel $k\in]0;1[$, il existe un unique réel x tel que $k=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{3}}$.

Exercice 13. La ***partie entière*** d'un réel *x*, notée $\mathrm{E}(x)$ est par définition le plus grand nombre entier inférieur ou égal à *x*. Par exemple, $\mathrm{E}(2{,}3)=2$, $\mathrm{E}(7)=7$, $\mathrm{E}(8{,}9)=8$, $\mathrm{E}(-2{,}75)=-3$ et $\mathrm{E}(-5{,}6)=-6$. La définition peut se traduire par : $\forall x\in\mathbb{R}, \mathrm{E}(x)\leqslant x<\mathrm{E}(x)+1$ et $E(x)\in\mathbb{Z}$.

a) Pour quelles valeurs de x la fonction E est-elle continue en x ? **b)** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{E(x)}{x}$.

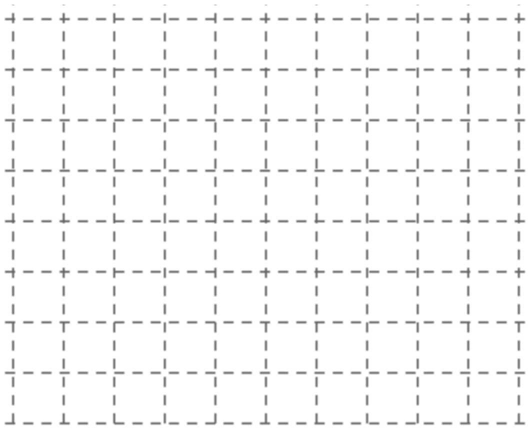
○ Exercice 14.

Soit f une fonction ayant <u>toutes</u> les caractéristiques suivantes :

- f est définie sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.
- f est décroissante sur $]-\infty ; 3[$ et croissante sur $]3 ; +\infty[$. $f(3) = -1$.

1) Donnez le tableau de variations de f .

2) Dessiner ci-contre le graphe de f .



○ Exercice 15. La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(1) = 0$

1) A partir du graphique et des renseignements fournis:

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Donner le tableau de signe de *f*.

2) Soit *h* la fonction définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Déterminer, en justifiant, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$