

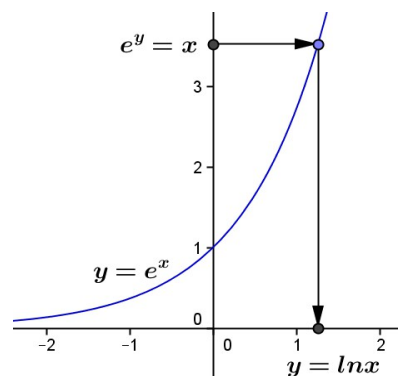
Introduction :

- On aimerait pouvoir résoudre des équations comme $e^x=3$ et savoir à partir de quelle valeur de n on a $\left(\frac{1}{3}\right)^n < 10^{-4}$. Pour le moment, trouver une solution exacte de la première équation est impossible et on résout la deuxième en faisant un tableau de valeur à la calculatrice ce qui est un peu long.
- Les fonctions de la forme $x \mapsto x^n$ où n est un entier positif ou négatif ont toutes des primitives (càd que ce sont toutes les dérivées d'une fonction) sauf la malheureuse $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui n'est la dérivée d'aucune des fonctions que vous avez rencontrées jusqu'à présent.
- Une fonction qui transforme les sommes en produits (l'exponentielle) c'est bien joli mais un produit c'est plus compliqué qu'une somme donc ce qu'on aimerait, c'est une fonction qui marcherait dans l'autre sens, càd une fonction qui transformerait les produits en sommes.
- On voit bien ce que veut dire 2^3 : c'est $2 \times 2 \times 2$. Mais pour le moment, on ne voit pas comment donner un sens à $2^{3,1}$ ou $2^{\sqrt{3}}$ ou 2^π . Avec exponentielle et \ln , on pose $2^{3,1} \stackrel{\text{def}}{=} e^{3,1 \ln 2}$ et plus généralement $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x \stackrel{\text{def}}{=} e^{x \ln 2}$ et le tour est joué !

I. Définition et propriétés algébriques

A. Définition et premières propriétés

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} et à valeurs dans $]0; +\infty[$. Ainsi par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (dit aussi théorème de la bijection), pour tout réel x strictement positif, l'équation $e^y = x$ où la variable est y et x est un paramètre, admet une unique solution. Il existe donc un unique réel y tel que $e^y = x$, ce réel est appelé logarithme népérien de x .



Théorème et définition 1: La fonction *logarithme népérien*, notée **ln**, est la fonction qui à tout réel strictement positif x associe l'unique antécédent de x par la fonction exponentielle. Autrement dit $e^{\ln x} = x$ (*antécédent*) et si y vérifie $e^y = x$ alors $y = \ln x$ (*unicité*). On note ce réel **ln(x)** ou **ln x**.

Exemples :

exp \curvearrowright	x	$\ln(1)=0$	$\ln e=1$	-1	2	$\ln(2)$	10	$\frac{1}{2}$	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$\ln x$	\curvearrowleft ln
	e^x	1	$e^1=e$	$e^{-1}=\frac{1}{e}$	e^2	2	e^{10}	$e^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	x	

Remarque : On sait maintenant résoudre toutes les équations du type $e^x = k$ où k est un réel : Si $k \leq 0$ elles n'admettent pas de solution et si $k > 0$ l'unique solution est $x = \ln(k)$.

Conséquences immédiates

P 2 ▪ L'ensemble de définition de la fonction \ln est $]0; +\infty[$; Autrement dit seuls les nombres strictement positifs ont un logarithme.

P 3 ▪ $\ln(1) = 0$ car $e^0 = 1$ et $\ln(e) = 1$ car $e^1 = e$.

P 4 ▪ $\forall x \in]0; +\infty[, e^{\ln x} = x$ et $\forall y \in \mathbb{R}, \ln(e^y) = y$.

Sous forme schématisée, cela donne $x > 0 \xrightarrow{\ln} \ln x \xrightarrow{\exp} x$ et $y \xrightarrow{\exp} e^y \xrightarrow{\ln} y$

P 5 ▪ Pour tout réel $x > 0$, $e^y = x \Leftrightarrow y = \ln(x)$.

Remarque : La propriété P4, qu'on peut traduire de façon informelle par « si on applique l'exponentielle puis le logarithme (ou le logarithme puis l'exponentielle) on revient au point de départ » signifie que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont des **fonctions réciproques l'une de l'autre**.

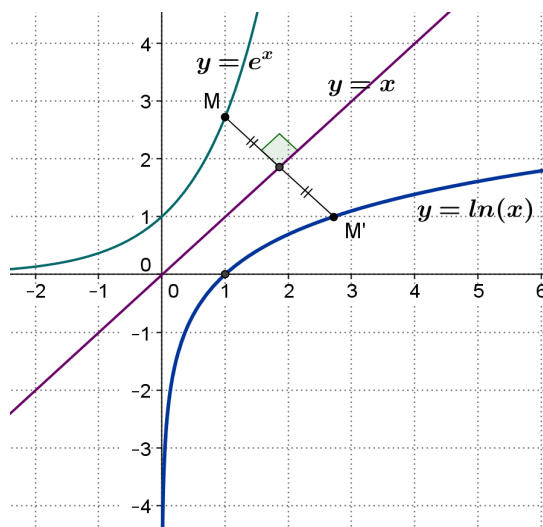
Vous en connaissez d'autres : les fonctions racine carré et carré (ou plutôt sa restriction aux nombres positifs) sont des fonctions réciproques l'une de l'autre : $x > 0 \mapsto \sqrt{x} \mapsto x$ et $y > 0 \mapsto y^2 \mapsto y$.

B. Courbe représentative de ln à connaître parfaitement !

Théorème 6 : Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la première bissectrice (= la droite d'équation $y=x$.)

Démonstration : On a vu dans l'activité d'introduction que des points dont les coordonnées sont de la forme $M(a;b)$ et $M'(b;a)$ (abscisse et ordonnée inversées) sont symétriques par rapport à la droite D d'équation $y=x$.

Or $M(a;b) \in \mathcal{C}_{\exp} \Leftrightarrow b=e^a \Leftrightarrow a=\ln b \Leftrightarrow M'(b;a) \in \mathcal{C}_{\ln}$.



C. Variations

Théorème 7 : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Démonstration (masquée quand la variable DEM en grisé dans le titre de la version Open Office de ce document vaut M. Pour faire apparaître les démonstrations, changer la valeur de DEM à autre chose que M)

Remarque : On retrouvera ce résultat avec le fait que la dérivée de ln est strictement positive sur $]0; +\infty[$

Conséquences :

P 8 $\forall a, b \in]0; +\infty[$, $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$;

P 9 $\forall a, b \in]0; +\infty[$, $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$;

P 10 $\forall a, b \in]0; +\infty[$, $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$.

Et voilà des outils fort utiles pour résoudre des équations et des inéquations !

Ces propriétés disent seulement que les fonctions exponentielle et ln sont strictement croissantes sur leurs domaines de définition respectifs.

D. Le logarithme transforme les produits en sommes

Relation fonctionnelle 11 : La fonction ln transforme les produits en somme.

Quels que soient les réels strictement positifs a et b , $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Démonstration (masquée quand la variable DEM vaut M.)

Remarque 12 : On étend par récurrence cette propriété au produit de n réels strictement positifs $a_1; a_2; \dots; a_n$: $\ln(a_1 a_2 \dots a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n$.

Conséquences immédiates

P 13 Quel que soit le réel strictement positif b , $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$.

P 14 Quels que soient les réels strictement positifs a et b , $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

P 15 Quels que soient le réel strictement positif a et l'entier relatif n , $\ln(a^n) = n \ln(a)$.
Ce résultat s'étend à $n=1/2$.

P 16 Quel que soit le réel strictement positif a , $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

Remarque : Il faut être très vigilant en utilisant les propriétés algébriques précédentes.

En effet si $x > 0$ et $y > 0$ alors $x y > 0$, mais la réciproque est fautive. Il faudra s'assurer au préalable de l'existence de telles écritures.

Exemple : L'expression $\ln(x(x+1))$ est définie pour tout réel x tel que $x < -1$ ou $x > 0$.

Mais l'écriture $\ln(x) + \ln(x+1)$ elle, n'a de sens que si $x > 0$. On ne pourra donc écrire $\ln(x(x+1)) = \ln(x) + \ln(x+1)$ que si $x > 0$.

II. Limites et dérivées

A. Continuité et dérivabilité

Théorème 17: La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.

Sa dérivée est la fonction inverse ; autrement dit, $\forall x \in]0; +\infty[, (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Démonstration (masquée quand la variable DEM vaut M.)

Remarque : Si on sait déjà que la fonction \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$, la dérivée est facile à obtenir : On a pour tout x strictement positif, $e^{\ln(x)} = x$. En dérivant les deux membres de l'égalité, on obtient :

$$(\ln x)' e^{\ln x} = 1, \text{ soit } (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Conséquence 18. Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

B. Limites à connaître

Autant l'exponentielle était la championne toutes catégories des limites, imposant sa volonté à tous les polynômes, autant le logarithme se laisse marcher sur les pieds par tout le monde (croissance comparée):

Limites à connaître pour le logarithme népérien

P 19. Limites visibles sur la courbe de \ln :

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

P 20. Croissance comparée de \ln et $x \mapsto x$:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$

P 21. Limite liées à la dérivée :

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

Démonstration

On retient parfois les deux dernières limites (et les autres limites de croissance comparée comme par exemple $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0$ où n est un entier strictement positif) en disant que « l'exponentielle l'emporte sur les polynômes qui eux-même l'emportent sur le logarithme en 0 et $+\infty$. ». Précisons que connaître cette phrase vous permet de retenir les limites à connaître mais ne vous dispense pas de rédiger.

l'emporte sur les polynômes qui eux-même l'emportent sur le logarithme en 0 et $+\infty$. ». Précisons que connaître cette phrase vous permet de retenir les limites à connaître mais ne vous dispense pas de rédiger.

Asymptotes ?

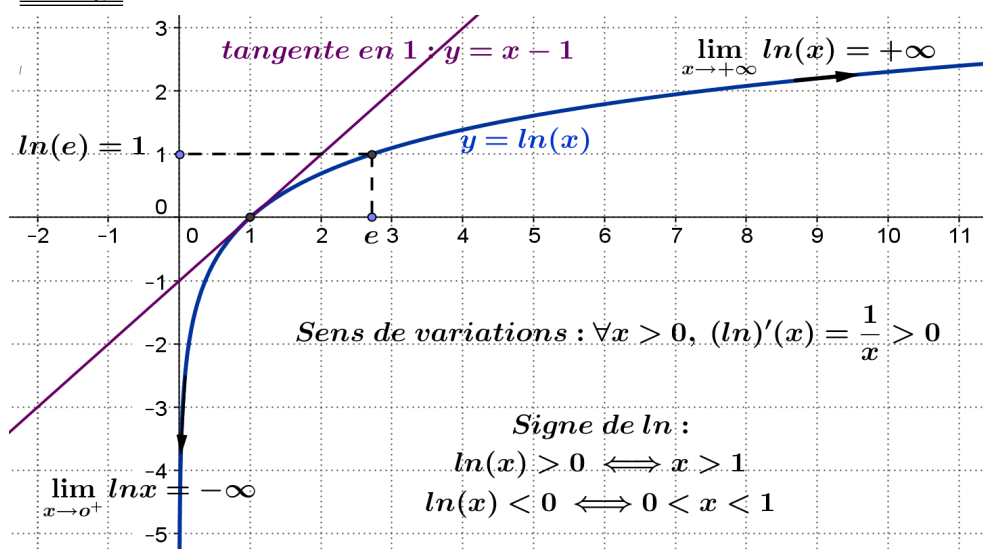
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe \mathcal{C}_{\ln} .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc la courbe \mathcal{C}_{\ln} n'admet pas d'asymptote horizontale.

C. Tableau de variations

Les résultats précédents nous permettent de construire le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

D. Résumé



III. Logarithme décimal

Nos amis physiciens et chimistes utilisent plutôt le logarithme décimal pour les calculs de décibels ou de pH par exemple. Le logarithme décimal est une fonction proportionnelle au logarithme népérien des mathématiciens.

Le **logarithme décimal** est la fonction notée \log_{10} , ou simplement **log** s'il n'y a pas d'ambiguïté possible, et définie sur $]0; +\infty[$ par $\log(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Propriétés

P 22 ▪ Quels que soient les réels strictement positifs a et b , $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.

P 23 ▪ $\log(1) = 0$ et $\log(10) = 1$.

P 24 ▪ Pour tout entier relatif n , $\log(10^n) = n$. [Le logarithme décimal « extrait » l'exposant des puissances de 10]

Les physiciens vous diront qu'avoir une fonction qui vaut 1 pour $x=10$, un beau nombre bien entier facile à visualiser, et qui de plus « extrait » l'exposant des puissances de 10, c'est quand même mieux qu'une fonction qui vaut 1 pour $x=e$, un drôle de nombre qui ne tombe même pas rond. Certes...

Mais regardez la dérivée du logarithme décimal : $(\log x)' = \frac{1}{x \ln(10)}$. Elle est bien plus compliquée que celle du logarithme népérien et en plus elle montre qu'on ne peut pas se passer du logarithme népérien puisque c'est $\ln(10)$ pas $\log(10)$ qui apparaît.

Remarque: On peut continuer à construire des fonctions sur la même idée : Le logarithme de base 2 défini par $\log_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$ vaut 1 pour $x=2$ et « extrait » l'exposant des puissances de 2 car $\log_2(2^x) = x$.

Table des matières

I. Définition et propriétés algébriques	1
A. Définition et premières propriétés.....	1
B. Courbe représentative de ln à connaître parfaitement !.....	2
C. Variations.....	2
D. Le logarithme transforme les produits en sommes.....	2
II. Limites et dérivées	3
A. Continuité et dérivabilité.....	3
B. Limites en à connaître.....	3
C. Tableau de variations.....	3
D. Résumé.....	4
III. Logarithme décimal	4

Sources : Le cours de M. Reisse-Barde, le manuel math'x.

TD TICE TS

De la fonction exponentielle à la fonction logarithme népérien

1) Une équation avec paramètre : Soit b un réel strictement positif fixé. Déterminer suivant les valeurs de b le nombre de solutions de l'équation $e^a = b$ où la variable est a et b est un paramètre.

Le résultat trouvé justifie la définition suivante :
 Pour tout réel $b > 0$, on note $\ln(b)$ ou $\ln b$ l'unique réel a tel que $e^a = b$. Autrement dit, pour tout réel $b > 0$, $\ln(b)$ est l'unique antécédents de b par la fonction exponentielle. On dit que $\ln(b)$ est le **logarithme népérien** de b .

2) Quelques valeurs

On pourra s'aider du tableau de valeur pour la fonction exponentielle ci-dessous.

(a) $\ln(1) = \dots\dots$ (b) $\ln(e) = \dots\dots$ (c) $\ln(e^2) = \dots\dots$ (d) $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \dots\dots$

	(a)	(b)	(c)	(d)	
x					$\ln(x)$
e^x	1				x

\exp ↗
↘ \ln

Illustrer ces résultats sur votre cahier à l'aide de la courbe de la fonction exponentielle

3) Courbe représentative de la fonction logarithme népérien

Soit \mathcal{C}_{\exp} la courbe représentative de la fonction exponentielle et \mathcal{C}_{\ln} la courbe représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthonormé du plan.

a) Soit a un réel quelconque et b un réel strictement positif. Démontrer que le point $M(a;b)$ appartient à \mathcal{C}_{\exp} ssi $M'(b;a)$ appartient à \mathcal{C}_{\ln} .

b) Avec Geogebra ou à la main, tracer la courbe \mathcal{C}_{\exp} et placer un point M sur cette courbe puis placer le point M' correspondant.

[Avec Geogebra, pour créer M' , taper dans la ligne de saisie $M'=(y(M), x(M))$].

Activer la tracer de M' et faites décrire à M la courbe \mathcal{C}_{\exp} .

La courbe décrite par M' et matérialisée par sa trace est

c) Quelle transformation semble transformer M en M' ? Démontrer ce résultat.

d) Tracer la courbe \mathcal{C}_{\ln} grâce à la commande « lieu » ou à la transformation trouvée.

4) Propriétés de la fonction logarithme népérien

a) D'après \mathcal{C}_{\ln} , conjecturer le sens de variation de \ln , ses limites et son signe. Pouvez-vous prouver certaines de vos conjectures ?

b) $\forall x \in]0; +\infty[$, $e^{\ln x} = \dots$ (à compléter). On admet dans cette question que \ln est dérivable. En dérivant l'égalité précédente, déterminer la dérivée de \ln .