Fonction Logarithme népérien | T.S.

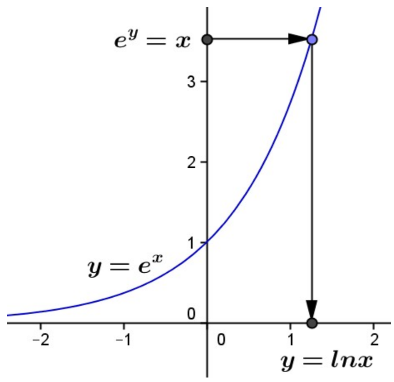
Introduction :

- On aimerait pour pouvoir résoudre des équations comme $e^x = 3$ et savoir à partir de quelle valeur de n on a $\left(\frac{1}{3}\right)^n < 10^{-4}$. Pour le moment, trouver une solution exacte de la première équation est impossible et on résout la deuxième en faisant un tableau de valeur à la calculatrice ce qui est un peu long.
- Les fonctions de la forme $x \mapsto x^n$ où n est un entier positif ou négatif ont toute des primitives (càd que ce sont toutes les dérivées d'une fonction) sauf la malheureuse $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui n'est la dérivée d'aucune des fonctions que vous avez rencontrées jusqu'à présent .
- Une fonction qui transforme les sommes en produits (l'exponentielle) c'est bien joli mais un produit c'est plus compliqué qu'une somme donc ce qu'on aimerait, c'est une fonction qui marcherait dans l'autre sens, càd une fonction qui transformerait les produits en sommes.
- On voit bien ce que veut dire 2^3 : c'est $2\times2\times2$. Mais pour le moment, on ne voit pas comment donner un sens à $2^{3,1}$ ou $2^{\sqrt{3}}$ ou 2^{π}. Avec exponentielle et ln, on pose $2^{3,1} \overset{\text{def}}{=} e^{3,1\ln 2}$ et plus généralement $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x \overset{\text{def}}{=} e^{x\ln 2}$ et le tour est joué !

I. Définition et propriétés algébriques

A. <u>Définition et premières propriétés</u>

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0;+\infty[$. Ainsi par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (dit aussi théorème de la bijection), pour tout réel x strictement positif, l'équation $e^y = x$ où la variable est y et x est un paramètre, admet une unique solution. Il existe donc un unique réel y tel que $e^y = x$, ce réel est appelé logarithme népérien de x.



<u>**Théorème et définition 1**</u>: La fonction ***logarithme népérien***, notée ***ln***, est la fonction qui à tout réel <u>strictement positif</u> x associe l'unique antécédent de x par la fonction exponentielle. Autrement dit $e^{\ln x} = x$ *(antécédent)* et si y vérifie $e^y = x$ alors $y = \ln x$ *(unicité)*. On note ce réel **ln(*x*)** ou **ln *x***.

<u>Exemples</u> :

exp

x	$\ln(1)=0$	$\ln e=1$	-1	2	$\ln(2)$	10	$\frac{1}{2}$	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$\ln x$
e^x	1	$e^1=e$	$e^{-1}=\frac{1}{e}$	e^2	2	e^{10}	$e^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	x

ln

<u>Remarque</u> : On sait maintenant résoudre toutes les équations du type $e^x = k$ où k est un réel : Si $k \leqslant 0$ elles n'admettent pas de solution et si $k > 0$ l'unique solution est $x = \ln(k)$.

<u>**Conséquences immédiates**</u>

<u>**P 2**</u> ▪ L'ensemble de définition de la fonction ln est $]0;+\infty[$; Autrement dit seuls les nombres strictement positifs ont un logarithme.

<u>**P 3**</u> ▪ ln(1) = 0 car $e^0 = 1$ et ln(e) = 1 car $e^1 = e$.

<u>**P 4**</u> ▪ $\forall x \in]0;+\infty[,\ e^{\ln x} = x$ et $\forall y \in \mathbb{R},\ \ln(e^y) = y$.

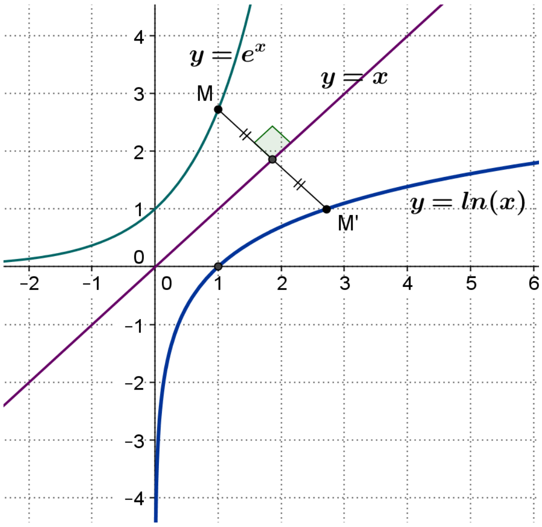
Sous forme schématisée, cela donne $x > 0 \overset{\ln}{\mapsto} \ln x \overset{\exp}{\mapsto} x$ et $y \overset{\exp}{\mapsto} e^y \overset{\ln}{\mapsto} y$

<u>**P 5**</u> ▪ Pour tout réel $x > 0$, $e^y = x \Leftrightarrow y = \ln(x)$.

Remarque : La propriété P4, qu'on peut traduire de façon informelle par «*si on applique l'exponentielle puis le logarithme (ou le logarithme puis l'exponentielle) on revient au point de départ* » signifie que les fonctions *exponentielle* et *logarithme népérien* sont des **fonctions réciproques l'une de l'autre**.
Vous en connaissez d'autres : les fonctions *racine carré* et *carré* (ou plutôt sa restriction aux nombres positifs) sont des fonctions réciproques l'une de l'autre : $x>0 \overset{\sqrt{}}{\mapsto} \sqrt{x} \overset{carré}{\mapsto} x$ et $y>0 \overset{carré}{\mapsto} y^2 \overset{\sqrt{}}{\mapsto} y$.

B. Courbe représentative de ln à connaître parfaitement !

Théorème 6: Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions *exponentielle* et *logarithme népérien* sont symétriques par rapport à la première bissectrice (càd la droite d'équation $y=x$.)



Démonstration : On a vu dans l'activité d'introduction que des points dont les coordonnées sont de la forme $M(a;b)$ *et* $M'(b;a)$ *(abscisse et ordonnée inversées)sont symétriques par rapport à la droite D d'équation* $y=x$.

Or $M(a;b)\in\mathscr{C}_{\exp}\Leftrightarrow b=e^a\Leftrightarrow a=\ln b\Leftrightarrow M'(b;a)\in\mathscr{C}_{\ln}$.

C. Variations

Théorème 7: La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Démonstration : À vous !

Remarque : *On retrouvera ce résultat avec le fait que la dérivée de ln est strictement positive sur* $]0;+\infty[$

Conséquences :

P 8 ▪ $\forall a,b\in]0;+\infty[,\ \ln a<\ln b\Leftrightarrow a<b$;

P 9 ▪ $\forall a,b\in]0;+\infty[,\ \ln a>\ln b\Leftrightarrow a>b$;

P 10 ▪ $\forall a,b\in]0;+\infty[,\ \ln a=\ln b\Leftrightarrow a=b$.

Et voilà des outils fort utiles pour résoudre des équations et des inéquations !
Ces propriétés disent seulement que les fonctions exponentielle et ln sont strictement croissantes sur leurs domaines de définition respectifs.

D. Le logarithme transforme les produits en sommes

Relation fonctionnelle 11: **La fonction ln transforme les produits en somme.**
Quels que soient les réels strictement positifs a et b , $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$.

Démonstration : À vous !

Remarque 12: On étend par récurrence cette propriété au produit de n réels strictement positifs $a_1;a_2;.....;a_n$: $\ln(a_1a_2.....a_n)=\ln a_1+\ln a_2+.....+\ln a_n$.

Conséquences immédiates

P 13 ▪ Quel que soit le réel strictement positif b , $\ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln(b)$.

P 14 ▪ Quels que soient les réels strictement positifs a et b , $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$.

P 15 ▪ Quels que soient le réel strictement positif a et l'entier relatif n , $\ln(a^n)=n\ln(a)$.
Ce résultat s'étend à n=1/2 :

P 16 ▪ Quel que soit le réel strictement positif a , $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln(a)$

Remarque : Il faut être très vigilant en utilisant les propriétés algébriques précédentes.
En effet si $x>0$ et $y>0$ alors $x\,y>0$, mais la réciproque est fausse. Il faudra s'assurer au préalable de l'existence de telles écritures.
Exemple : L'expression $\ln(x(x+1))$ est définie pour tout réel x tel que $x<-1$ ou $x>0$.
Mais l'écriture $\ln(x)+\ln(x+1)$ elle, n'a de sens que si $x>0$. On ne pourra donc écrire $\ln(x(x+1))=\ln(x)+\ln(x+1)$ que si $x>0$.

II. Limites et dérivées

A. Continuité et dérivabilité

Théorème 17: La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
Sa dérivée est la fonction inverse ; autrement dit, $\forall x\in]0\,;+\infty[,\ (\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

Démonstration : À vous !

Remarque : Si on sait déjà que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, la dérivée est facile à obtenir : On a pour tout x strictement positif, $e^{\ln(x)}=x$. En dérivant les deux membres de l'égalité, on obtient : $(\ln x)'e^{\ln x}=1$, soit $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

Conséquence 18. Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction ln u est dérivable sur I et $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$.

B. Limites à connaître

Autant l'exponentielle était la championne toutes catégories des limites, imposant sa volonté à tous les polynômes, autant le logarithme se laisse marcher sur les pieds par tout le monde (croissance comparée):

Limites à connaître pour le logarithme népérien

P 19. Limites visibles sur la courbe de ln : ▪ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln(x)=-\infty$ ▪ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$

P 20. Croissance comparée de ln et $x\mapsto x$: ▪ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ ▪ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x\ln(x)=0$

P 21. Limite liées à la dérivée : ▪ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$

Démonstrations : À vous !

*On retient parfois les deux dernières limites (et les autres limites de croissance comparée comme par exemple $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^n}=0$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^n\ln(x)=0$ où n est un entier strictement positif) en disant que « **l'exponentielle l'emporte sur les polynômes qui eux-même l'emportent sur le logarithme en 0 et $+\infty$.** ». Précisons que connaître cette phrase vous permet de retenir les limites à connaître mais ne vous dispense pas de rédiger.*

Asymptotes ?

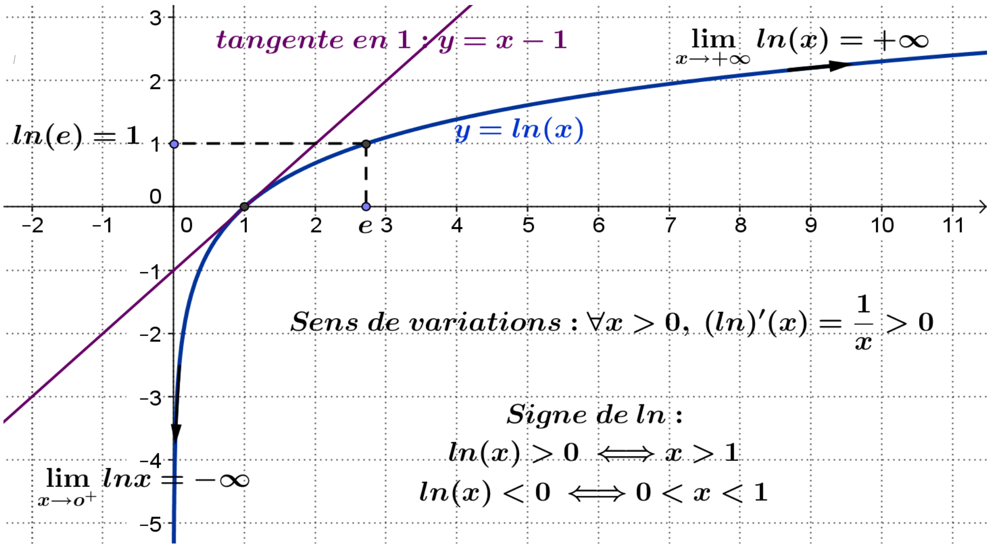
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln(x)=-\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ n'admet pas d'asymptote horizontale.

C. Tableau de variations

Les résultats précédents nous permettent de construire le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$ln(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

D. Résumé



III. Logarithme décimal

Nos amis physiciens et chimistes utilisent plutôt le logarithme décimal pour les calculs de décibels ou de pH par exemple. Le logarithme décimal est une fonction proportionnelle au logarithme népérien des mathématiciens.

Le ***logarithme décimal*** est la fonction notée $\mathbf{log_{10}}$, ou simplement **log** s'il n'y a pas d'ambiguïté possible, et définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\log(x) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Propriétés

P 22 ▪ Quels que soient les réels strictement positifs a et b, $\log(ab)=\log(a)+\log(b)$.

P 23 ▪ log(1) = 0 et log(10) = 1.

P 24 ▪ Pour tout entier relatif n , $\log(10^n)=n$. [Le logarithme décimal « extrait » l'exposant des puissances de 10]

Les physiciens vous diront qu'avoir une fonction qui vaut 1 pour $x=10$, un beau nombre bien entier facile à visualiser, et qui de plus « extrait » l'exposant des puissances de 10, c'est quand même mieux qu'une fonction qui vaut 1 pour $x=\mathrm{e}$, un drôle de nombre qui ne tombe même pas rond. Certes....

Mais regardez la dérivée du logarithme décimal : $(\log x)'=\dfrac{1}{x\ln(10)}$. Elle est bien plus compliquée que celle du logarithme népérien et en plus elle montre qu'on ne peut pas se passer du du logarithme népérien puisque c'est ln(10) pas log (10) qui apparaît.

Remarque: On peut continuer à construire des fonctions sur la même idée : Le logarithme de base 2 défini par $\log_2(x) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$ vaut 1 pour $x=2$ et « extrait » l'exposant des puissances de 2 car $\log_2(2^x)=x$.

Table des matières

Sources : Le cours de M. Reisse-Barde, le manuel math'x.

Démonstrations

♠ Démonstration de P7.

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a<b$. Comme $a=e^{\ln(a)}$ et $b=e^{\ln(b)}$, la condition peut s'écrire $e^{\ln(a)}<e^{\ln(b)}$, ce qui entraîne $\ln(a)<\ln(b)$ d'après les propriétés de la fonction exponentielle. La fonction logarithme népérien conserve l'ordre (strict) des nombres, elle est donc strictement croissante.

♠ Démonstration de P11.

Soient a et b deux réels strictement positifs.

$\ln(ab) \overset{(i)}{=} \ln\left(\mathrm{e}^{\ln a}\mathrm{e}^{\ln b}\right) \overset{(ii)}{=} \ln\left(\mathrm{e}^{\ln a+\ln b}\right) \overset{(iii)}{=} \ln a+\ln b$, qui est le résultat cherché.

(i) car $a=\mathrm{e}^{\ln(a)}$ *et* $b=\mathrm{e}^{\ln(b)}$ *vu que* $a,b>0$ *; (ii) car* $\forall x,y\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^{x+y}$ *; (iii) car* $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \ln(\mathrm{e}^x)=x$.

♠ Démonstration de P17.

- On admet que la fonction ln est continue sur $]0;+\infty[$.
- Démontrons que ln est dérivable sur $]0;+\infty[$, c'est-à-dire en tout réel x_0 de l'intervalle $]0;+\infty[$.

On va étudier la limite du taux d'accroissement en x_0 de la fonction ln, $\dfrac{\ln x-\ln x_0}{x-x_0}$, lorsque x est strictement positif et tend vers x_0.

Posons y = ln x et $y_0 - \ln x_0$. On a alors $x=e^y$ et $x_0=e^{y_0}$ et enfin. $\dfrac{\ln x-\ln x_0}{x-x_0}=\dfrac{y-y_0}{e^y-e^{y_0}}$

La fonction ln étant continue sur $]0;+\infty[$, $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$ c'est à dire $\lim\limits_{x\to x_0} y=y_0$.

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en y_0, et (exp)' = exp. Donc $\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{e^y-e^{y_0}}{y-y_0}=e^{y_0}$ ce qui donne d'après le théorème sur la limite de l'inverse : $\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{y-y_0}{e^y-e^{y_0}}=\dfrac{1}{e^{y_0}}$.

Donc $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln x-\ln x_0}{x-x_0}=\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{y-y_0}{e^y-e^{y_0}}=\dfrac{1}{e^{y_0}}=\dfrac{1}{x_0}$. Ceci prouve la dérivabilité de la fonction ln sur $]0;+\infty[$ et que $\forall x\in]0;+\infty[,\ (\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

- La fonction logarithme népérien est dérivable donc continue sur $]0;+\infty[$.

♠ Démonstration de P19. ▪ <u>En l'infini</u> : Soit A un nombre réel. Dès que $x>e^A$, on a $\ln(x)>A$. Ainsi tout intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de ln(x) pour x assez grand (ici $x>e^A$). Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.

▪ <u>En 0</u> : Pour x > 0, posons $X=\dfrac{1}{x}$. On a d'une part $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} X=+\infty$ et d'autre part $\ln(x)=-\ln(X)$. D'où, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}-\ln(X)=-\infty$.

♠ Démonstration de P20. ▪ Pour x > 0, posons X = ln(x); on a alors $x=\mathrm{e}^X$ et $\dfrac{\ln(x)}{x}=\dfrac{X}{e^X}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{X}=+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty}\dfrac{\mathrm{X}}{e^{\mathrm{X}}}=0$ par une limite du cours sur l'exponentielle.

♠ Démonstration de P21. On reconnaît le limite d'un taux de variations , la limite est donc la valeur de la dérivée en un point : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}=(\ln)'(1)=\dfrac{1}{11}=1$

TD TICE TS
De la fonction exponentielle à la fonction logarithme népérien

1) Une équation avec paramètre : Soit b un réel strictement positif fixé. Déterminer suivant les valeurs de b le nombre de solutions de l'équation $e^a = b$ <u>où la variable est a et b est un paramètre</u>.

Le résultat trouvé justifie la définition suivante :
Pour tout réel $b>0$, on note $\ln(b)$ ou $\ln b$ l'unique réel a tel que $e^a = b$. Autrement dit, pour tout réel $b>0$, $\ln(b)$ est l'unique réel antécédents de b par la fonction exponentielle. On dit que $\ln(b)$ est le ***logarithme népérien*** de b.

2) Quelques valeurs
On pourra s'aider du tableau de valeur pour la fonction exponentielle ci-dessous.

(a) $\ln(1) = \ldots\ldots$ **(b)** $\ln(e) = \ldots\ldots$ **(c)** $\ln(e^2) = \ldots\ldots$ **(d)** $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ldots\ldots$

exp

ln

	(a)	(b)	(c)	(d)	
x					$\ln(x)$
e^x	1				x

Illustrer ces résultats sur votre cahier à l'aide de la courbe de la fonction exponentielle

3) Courbe représentative de la fonction logarithme népérien
Soit $\mathscr{C}_{\exp}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et $\mathscr{C}_{\ln}$ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthonormé du plan.

a) Soit a un réel quelconque et b un réel strictement positif. Démontrer que le point $M(a;b)$ appartient à $\mathscr{C}_{\exp}$ ssi $M'(b;a)$ appartient à $\mathscr{C}_{\ln}$.

b) Avec Geogebra ou à la main, tracer la courbe $\mathscr{C}_{\exp}$ et placer un point M sur cette courbe puis placer le point M' correspondant.
[Avec Geogebra, pour créer M', taper dans la ligne de saisie $M' = (y(M), x(M))$].
Activer la tracer de M' et faites décrire à M la courbe $\mathscr{C}_{\exp}$.
La courbe décrite par M' et matérialisée par sa trace est . . . . .

c) Quelle transformation semble transformer M en M' ? Démontrer ce résultat.

d) Tracer la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ grâce à la commande « lieu » ou à la transformation trouvée.

4) Propriétés de la fonction logarithme népérien

a) D'après $\mathscr{C}_{\ln}$, conjecturer le sens de variation de ln, ses limites et son signe. Pouvez-vous prouver certaines de vos conjectures ?

b) $\forall x \in]0;+\infty[$, $e^{\ln x} = \ldots$ *(à compléter)*. On admet dans cette question que ln est dérivable. En dérivant l'égalité précédente, déterminer la dérivée de ln.

Mon brouillon, autres formulations des resultats

<u>**Corollaires**</u> de ce qui précède

<u>**P 27**</u> ▪ $\exp(0) = 1$

<u>**P 28**</u> ▪ La fonction exponentielle est dérivable et donc aussi continue sur $\mathbb{R}$.

P 29 ▪ $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x)=\exp(x)$

P 30 ▪ Pour tout réel x, $\exp(x)>0$. En particulier, pour tout réel x, $\exp(x)\neq 0$.

$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in \mathbb{R}$, $e^y=x \Leftrightarrow y=\ln(e^x)$ $\begin{cases} y=\ln x \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y=x \\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$ Pour tout réel x > 0, $y=\ln(x)$ équivaut à $x=e^y$.

Remarque : La propriété P4, qu'on peut traduire informellement par par «*si on applique l'exponentielle puis le logarithme (ou le logarithme puis l'exponentielle) on revient au point de départ* » et représenter par signifie que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont des **fonctions réciproques l'une de l'autre**.

$$x=e^y>0 \underset{exp}{\overset{ln}{\rightleftarrows}} lnx=y$$