Loi exponentielle | T.S.

Dans ce chapitre nous verrons comment la loi exponentielle permet de modéliser des phénomènes *sans vieillissement* (on dt aussi *sans usure* ou *sans mémoire*)

Table des matières

I. Modèle : Loi de durée de vie sans vieillissement

A. Caractérisation d'une loi de durée de vie sans vieillissement

♠ Exemple 1. Notons T la variable aléatoire qui donne la durée de vie, en année, d'un être humain. T prend donc ses valeurs dans $[0;+\infty]$. $\forall t\in[0;+\infty]$, $P(T\geq t)$ est l'événement « *La durée de vie de cette personne dépasse t années* » autrement dit « *La personne encore en vie après t années* ».

Actuellement, pour un enfant qui vient de naître, la probabilité de vivre 40 ans de plus est de l'ordre de 0,98 (donné par les tables de mortalité), ce qui s'écrit $P(T\geqslant 40)\approx 0{,}98$. Évidemment, La probabilité de vivre 40 ans de plus, pour une personne qui a déjà 50 ans est un nombre bien inférieur, de l'ordre de 0,65, ce qui s'écrit $P_{T\geqslant 50}(T\geqslant 50+40)\approx 0{,}65$. Pour une personne de 60 ans, cette probabilité de vivre 40 ans de plus est de l'ordre de 0,02. Les humains, les animaux et la plupart des objets sont soumis au *vieillissement* ou à *l'usure* : par exemple, on n'a pas la même probabilité de vivre 40 ans de plus lorsque l'on vient de naître ou lorsque l'on a déjà 50, ce qu'on exprime par $P_{T\geqslant 50}(T\geqslant 50+40)\neq P(T\geqslant 40)$.

La plupart des phénomènes naturels sont soumis au processus de vieillissement ou à celui d'usure. Il existe cependant des phénomènes où il n'y a pas de vieillissement ou d'usure. Il s'agit en général de phénomènes accidentels.

♠ Exemple 2. Certains composants électroniques sont inusables ou presque. Ils cessent en général de fonctionner non pas parce qu'ils ont vieilli mais pour des causes accidentelles externes : surtension, choc dans l'appareil, surchauffe de l'appareil oublié au soleil, liquide renversé sur l'appareil, poussière ou sable qui rentre dans l'appareil...etc. Notons T la variable aléatoire qui donne la durée de vie, en année, d'un tel composant électronique. T prend ses valeurs dans $[0;+\infty]$.
$\forall t\in[0;+\infty]$, $P(T\geq t)$ est l'événement « *La durée de vie du composant dépasse t années* » autrement dit « *Le composant marche encore après t années* ».
Pour les phénomènes où il n'y a pas de vieillissement ou d'usure, la probabilité, pour un objet d'être encore en vie ou de ne pas tomber en panne avant un délai donné *h* sachant que l'objet est en bon état à un instant *t*, <u>ne dépend pas de *t*</u>. Cela se traduit par $P_{T\geqslant t}(T\geqslant t+h)$ ne dépend pas de *t*. En particulier, pour $t=0$, cette probabilité est égale à $P_{T\geqslant 0}(T\geqslant h)$. Or $P_{T\geqslant 0}(T\geqslant h)\overset{\text{def}}{=}\dfrac{P(T\geqslant 0 \text{ et } T\geqslant h)}{P(T\geqslant 0)}$ et « $T\geqslant 0$ » est l'événement certain donc $P(T\geqslant 0)=1$ et l'événement « $T\geqslant 0$ et $T\geqslant h$ » peut aussi être décrit par « $T\geqslant h$ ». Ainsi, pour tous réels positifs *t* et *h*, on a $P_{T\geqslant t}(T\geqslant t+h)=P(T\geqslant h)$.

On choisit cette formule comme définition des lois sans vieillissement.

<u>Définition d'une loi de durée de vie sans vieillissement [1]</u>. Une variable aléatoire T à valeurs positives suit une loi ***sans vieillissement*** (on dit aussi ***sans usure*** ou ***sans mémoire***) lorsque : pour tous réels positifs *t* et *h*, on a $P_{T\geqslant t}(T\geqslant t+h)=P(T\geqslant h)$.

Autrement dit, pour les phénomènes où il n'y a pas de vieillissement ou d'usure, la probabilité, pour un objet d'être encore en vie ou de ne pas tomber en panne avant un délai donné h à partir d'un instant t où l'objet est encore en bon état sera la même que la probabilité de durer h heures à partir de sa mise en service initiale (ou sa naissance).

Autrement dit, si à l'instant t il marche encore, alors à l'instant t il est comme neuf.

♠ Exemple 3. Si la durée de vie d'un composant électronique suit une loi sans vieillissement, la probabilité que sa durée de vie dépasse 10 ans sachant qu'il a déjà fonctionné 7 ans est $P_{T\geqslant 7}(T\geqslant 10)$. Avec $t=7$ et $h=3$, on a $P_{T\geqslant 7}(T\geqslant 10)=P_{T\geqslant 7}(T\geqslant 7+3)=P(T\geqslant 3)$. Autrement dit, tout se passe comme si le composant était toujours neuf au bout de 7 années ; il n'a pas de mémoire des 7 années passées (pas de vieillissement, pas d'usure).

B. Exemples de lois sans vieillissement

La plupart des êtres et des objets vieillissent donc on a du mal à imaginer des phénomènes sans vieillissement. En voici cependant quelques uns :

Un atome radioactif est un atome instable (ce qui est dû à un excès de protons, ou à un excès de neutrons, ou encore à un excès des deux) qui au bout d'un temps fini se désintègre, càd se transforme en un atome d'un autre type. Ainsi, de noyau radioactif en noyau radioactif, l'uranium 238 tend à se transformer en une forme stable, le plomb 206. Les physiciens ont constaté expérimentalement que la désintégration est un phénomène sans mémoire : Un atome qui est radioactif depuis depuis longtemps n'a pas plus de chance de se désintégrer dans la minute qui vient qu'un atome radioactif qui vient d'être créé. **La durée de vie d'un atome radioactif** peut donc être décrite par une loi sans vieillissement.

La loi sans vieillissement peut aussi être utilisée pour décrire :

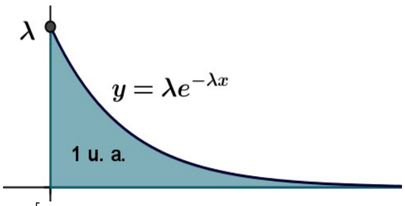
- **la durée de vie d'un verre en cristal**. En effet, la probabilité pour le verre d'être cassé par exemple dans les cinq ans ne dépend pas de sa date de fabrication.
- **la durée de vie d'un composant électronique** (un des exemple favoris de TS)
- **le temps écoulé entre deux accidents de voiture** dans lequel un individu donné est impliqué : si pendant 2 ans vous n'avez pas eu d'accident, cela n'augmente pas la probabilité que vous en ayez un dans l'année qui vient, ce qui s'écrit $P_{T\geqslant 2}(T\geqslant 3)=P_{T\geqslant 2}(T\geqslant 2+1)=P(T\geqslant 1)$; Que vous ayez ou non eu des accidents lors de ces deux premières années est « oublié » ;
- **le temps écoulé entre l'arrivée de deux personnes à la caisse d'un supermarché** (non, ce n'est pas la même chose que le temps d'attente à la caisse).

Remarque : Les manuels de TS regorgent de situations modélisées à tort par une loi sans vieillissement : temps d'attente à un standard téléphonique, à un guichet ou à la caisse d'un supermarché. En effet, la probabilité de passer à la caisse dans les deux minutes qui viennent pour quelqu'un qui a déjà attendu 10 minutes est inférieure à la probabilité de passer à la caisse dans les deux minutes pour quelqu'un qui vient juste d'arriver ; il y a donc vieillissement.

II. Loi exponentielle de paramètre λ>0

On peut alors se demander si les phénomènes sans vieillissement correspondent à un type de loi particulier. La réponse est oui, la loi exponentielle.

Définition [2]. Soit λ un réel strictement positif. La ***loi exponentielle de paramètre*** λ est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.



Démonstration du fait que f est bien une densité de probabilité sur $[0\,;+\infty[$:

- *la fonction f est continue sur* $[0\,;+\infty[$ *comme composée et produit de fonctions continues.*
- *la fonction f est positive sur* $[0\,;+\infty[$ *car* λ *et l'exponentielle le sont.*
- *l'aire sous la courbe de f sur* $[0\,;+\infty[$ *est égale à 1 : En effet, soit b un réel strictement positif.* $\int_0^b \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\left[-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^b=-\mathrm{e}^{-\lambda b}+1$ *donc* $\textit{Aire sous la courbe}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\lim_{b\to+\infty}\left(-\mathrm{e}^{-\lambda b}+1\right)=0+1=1$.

Remarque [3]. L'ordonnée à l'origine de la densité *f* vaut $f(0)=\lambda$ ce qui donne parfois une façon de déterminer λ.

Premières propriétés de la loi exponentielle. *(obtenues par des calculs d'intégrale au moyen d'une primitive)*

Soit T une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda \in [0\,;+\infty[$.

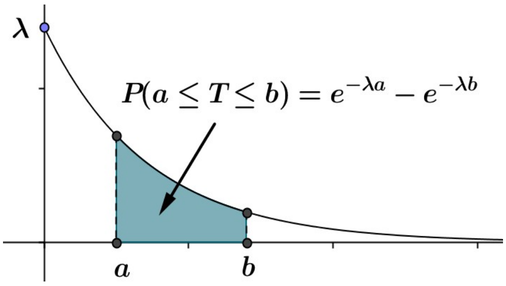
▪ **P4**. Quels que soient les réels positifs a et b vérifiant $0 \leqslant a \leqslant b$, on a :

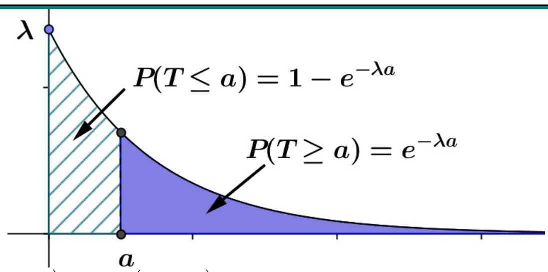
$$P(a \leqslant T \leqslant b) = P(a < T < b) = P(a < T \leqslant b) = P(a \leqslant T < b) = \int_a^b \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt = [-e^{-\lambda t}]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

▪ **P5**. Pour tout réel $a \geqslant 0$, $P(T \leqslant a) = P(T < a) = P(0 < T < a) = 1 - e^{-\lambda a}$

▪ **P6**. Pour tout réel $a \geqslant 0$, $P(T \geqslant a) = P(T > a) = 1 - P(T \leqslant a) = e^{-\lambda a}$

Illustrations :





$P(T<a)$ *et* $P(T \geqslant a)$ *sont des événements contraires donc quand on ajoute leurs probabilités on trouve 1.*

♠ Exemple 4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 3.

- $P(1 \leqslant X < 2) = \int_1^2 3\, e^{-3t}\, dt = [-e^{-3t}]_1^2 = -e^{-6} + e^{-3} \approx 0{,}0473$.
- $P(X > 4) = 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 4) = 1 - \int_0^4 3\, e^{-3t}\, dt = 1 - [-e^{-3t}]_0^4 = 1 - (-e^{12} + 1) = e^{-12} \approx 6{,}14 \times 10^{-6}$.

[P7] « La loi exponentielle n'a pas de mémoire ». Si une variable aléatoire T suit une loi exponentielle, alors sa loi est ***sans vieillissement*** (on dit aussi ***sans usure*** ou ***sans mémoire***) ce qui signifie que (voir [1]) pour tous réels positifs t et h, on a $P_{T \geqslant t}(T \geqslant t + h) = P(T \geqslant h)$.

Démonstration de P7 : ▣ **ROC**

Remarque [8]. On admet que réciproquement, une variable à densité sans vieillissement suit forcément une loi exponentielle. Il existe par contre des variables discrètes (= qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs) sans vieillissement.

Finalement, parmi les variables aléatoires à densité, les seules qui sont sans vieillissement sont celles qui suivent une loi exponentielle.

III. Espérance d'une v.a. qui suit une loi exponentielle

Définition et propriété [9]. Soit T une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Son **espérance** est *définie* par $E(T) \overset{\text{def}}{=} \lim_{b \to +\infty} \int_0^b t\,\lambda\, e^{-\lambda t}\, dt$ et elle *vaut* $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.

L'espérance $\frac{1}{\lambda}$ s'interprète comme la **durée de vie moyenne** (du composant, de l'atome...etc).

Démonstration de P9: ▣ **ROC**

Sources : Le cours de Pierre Lux, un document de l'IREM de Toulouse, le manuel Transmath, Wikipedia

Démonstrations

■ ***Démonstration de P7*** : ▣ **ROC**

$P_{T\geqslant t}(T\geqslant t+h) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{P(T\geqslant t \text{ et } T\geqslant t+h)}{P(T\geqslant t)} = \dfrac{P(T\geqslant t+h)}{P(T\geqslant t)} \overset{(i)}{=} \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} \overset{(ii)}{=} P(T\geqslant 0)$. *(i) et (ii) : Par P6.*

■ ***Démonstration de P9:*** ▣ **ROC**

• *On cherche une primitive de* $f_\lambda : t \mapsto t\times\lambda\, e^{-\lambda t}$ *sur* $\mathbb{R}^+$ *sous la forme d'une fonction* $F_\lambda : t\mapsto (m\,t+n)\, e^{-\lambda t}$ *(avec* $m\in\mathbb{R}^*$, $n\in\mathbb{R}$*).* F_λ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^+$ *par produit de fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}^+$.

$\forall t\in\mathbb{R}^+,\ F'_\lambda(t) = m\, e^{-\lambda t} - \lambda(m\,t+n)\, e^{-\lambda t} = (-\lambda\, mt + (m-\lambda\, n))\, e^{-\lambda t}$

En identifiant F'_λ *à* f_λ *, on obtient :* $\begin{cases}-\lambda\, m=\lambda\\ m-\lambda\, n=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1\\ n=-\dfrac{1}{\lambda}\end{cases}$. *On en déduit que* $F_\lambda : t\mapsto \left(-t-\dfrac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$

• *Ainsi, pour tout* $b\geqslant 0$, *on obtient :*

$$\int_0^b t\times\lambda\, e^{-\lambda t}\, dt = F_\lambda(b)-F_\lambda(0) = \left(-b-\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda b} - \left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \left(-b-\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda b} + \frac{1}{\lambda} = -\frac{b}{e^{\lambda b}} - \frac{1}{\lambda\, e^{\lambda b}} + \frac{1}{\lambda}.$$

Grâce aux résultats de croissances comparés, on conclut que $E(T) = \lim\limits_{b\to+\infty} \displaystyle\int_0^b \lambda\, t\, e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}$.