Manipulations d'Inégalités et sens de variations de fonctions | 2nde

Rappel : Fonctions croissantes et décroissante

▪ Une fonction f est ***croissante*** sur un intervalle I ssi quels que soient les nombres a et b appartenant à I, on a : si $a<b$ alors $f(a)\leqslant f(b)$. *« Les fonctions croissantes conservent les inégalités (= les laissent dans le même sens) ».*

▪ Une fonction f est ***décroissante*** sur un intervalle I ssi quels que soient les nombres a et b appartenant à I, on a : si $a<b$ alors $f(a)\geqslant f(b)$. *« Les fonctions décroissantes retournent les inégalités».*

Rappel : Règles de manipulation des inégalités

	La règle	*Reformulation de cette règle en terme de fonction croissante ou décroissante*
R1.	Si on **ajoute** (ou soustrait[1]) le même nombre (*positif ou non*) aux deux membres d'une inégalité, l'inégalité est conservée.	La fonction $x\mapsto x+k$ (*càd la fonction qui ajoute la constante k*) est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
R2.	Si on **multiplie** (ou divise[2]) les deux membres d'une inégalité par le même nombre **positif**, l'inégalité est conservée.	Si $k>0$, la fonction $x\mapsto k\,x$ (*càd la fonction qui multiplie par la constante positive k*) est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
R3.	Si on **multiplie** (ou divise) les deux membres d'une inégalité par le même nombre **négatif**, l'inégalité est **retournée**.	Si $k<0$, la fonction $x\mapsto k\,x$ (*càd la fonction qui multiplie par la constante négative k*) est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
R4.	Deux nombres **positifs** sont rangés dans le **même** ordre que leurs **carrés**.	La fonction $x\mapsto x^2$ (*càd la fonction qui met au carré*) est **croissante** sur $[0,+\infty[$.
R5.	Deux nombres **négatifs** sont rangés dans l'ordre **inverse** de leurs **carrés**.	La fonction $x\mapsto x^2$ (*càd la fonction carré*) est **décroissante** sur $]-\infty\,;0]$.
R6.	Deux nombres **positifs** sont rangés dans l'ordre **inverse** de leurs **inverses**.	La fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ (*càd la fonction qui transforme un nombre en son inverse*) est **décroissante** sur $]0,+\infty[$.
R7.	Deux nombres **négatifs** sont rangés dans l'ordre **inverse** de leurs **inverses**.	La fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ (*càd la fonction inverse*) est **décroissante** sur $]-\infty\,;0[$.
R8.	On peut toujours **ajouter** des inégalités membre à membre.	
R9.	On peut **multiplier** des inégalités membres à membre à condition que tous les membres soient **positifs.**	

❍ Exercice MI 1. Complétez ou écrivez les inégalités demandées et indiquez la règle utilisée.

1) Si $x>3$ alors $x+2>$ . . . . . d'après la règle . . . . . .

2) Si $x<5$ alors $-3x$ . . . . d'après la règle . . . . . .

3) Si $x<5$ alors $3x$ . . . . d'après la règle . . . . . .

4) Si $x>3$ alors $\dfrac{1}{x}$ . . . . d'après la règle . . . . . . d'où $-\dfrac{2}{x}$ . . . . .d'après la règle . . . . . .

5) Si $2<x<5$ alors . . . . . $\dfrac{1}{x}$ . . . . d'après la règle . . . . . .

6) Si $-25<x<-9$ alors . . . . . $\dfrac{1}{x}$ . . . . d'après la règle . . . . . .

7) Si $x>\dfrac{1}{2}$ alors x^2 . . . . d'après la règle . . . . . . d'où x^2-16 . . . . . . d'après la règle . . . . .

8) Si $1<x<3$ alors . . . . . $x-8$ . . . . d'après . . . . . . d'où . . . . . . $(x-8)^2$ . . . . . . d'après . . . . .

[1] *La règle pour la soustraction est une conséquence de celle pour l'addition car « soustraire = ajouter l'opposé ».*
[2] *La règle pour la division est une conséquence de celle pour la multiplication car « diviser = multiplier par l'inverse ».*

◯ Exercice MI 2. Complétez les inégalités en justifiant.

Le tableau de variations d'une fonction f est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f(x)$	20	↘	-56	↗	-2	↘	-10

Compléter si possibles les inégalités et justifier par une phrase du type « car la fonction .... est croissante (décroissante) sur ...... »

1) -8 ..... -5 donc $f(-8)$ ...... $f(-5)$ car ....

2) 9 ..... $13{,}2$ donc $f(9)$ ..... $f(13{,}2)$ car ....

3) $-3{,}15$ ..... $-3{,}2$ donc $f(-3{,}15)$ ..... $f(-3{,}2)$ car ....

4) -2 ..... -5 donc $f(-2)$ ..... $f(-5)$ car ....

5) -8 ..... -5 donc $(-8)^2$ ...... $(-5)^2$ car ....
donc $f((-8)^2)$ ...... $f((-5)^2)$ car ....

6) -8 ..... -5 donc $\frac{1}{-8}$ ...... $\frac{1}{-5}$ car ....
donc $f\left(-\frac{1}{8}\right)$ ...... $f\left(-\frac{1}{5}\right)$ car ....

◯ Exercice MI 3. Complétez les inégalités en justifiant.

Le tableau de variations d'une fonction f est donné ci-dessous :

x	-100		-2		3		100
$f(x)$	1/8	↗	2	↘	-4	↗	-2

On connaît de plus certaines valeurs de f :

x	*-6*	*-5*	*-4*	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
f(x)	*1/6*	*1/5*	*1/4*	*1*	*2*	*1*	*-2*	*-2,4*	*-3*	*-4*	*-3,8*	*-3,5*	*-3,4*	*-3,2*	*-3*	*-2,9*

Compléter et justifier

1) Si $-2 \leqslant x \leqslant 3$ alors .... $\leqslant f(x) \leqslant$ .... car ....

2) Si $-3 \leqslant x \leqslant 3$ alors .... $\leqslant f(x) \leqslant$ ....

3) $-6{,}3$ ..... $-6{,}27$ donc $f(-6{,}3)$ ..... $f(-6{,}27)$ car ....

4) -2 ..... -5 donc $f(-2)$ ..... $f(-5)$ car ....

5) -8 ..... -5 donc $(-8)^2$ ...... $(-5)^2$ car ....
donc $f((-8)^2)$ ...... $f((-5)^2)$ car ....

6) -8 ..... -5 donc $\frac{1}{-8}$ ...... $\frac{1}{-5}$ car ....
donc $f\left(-\frac{1}{8}\right)$ ...... $f\left(-\frac{1}{5}\right)$ car ....