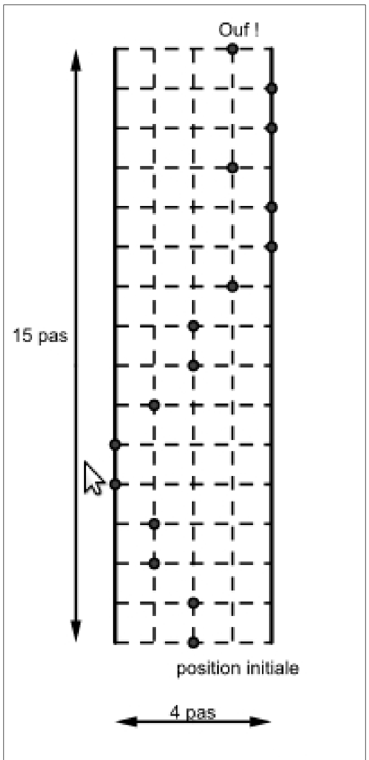
Après s'être longuement attardé à la brasserie « les deux rives », M. Heine Ken décide de rentrer chez lui. Pour cela il doit emprunter un pont sans garde-corps de 15 pas de long et 4 pas de large.
Après quelques verres, la démarche de Ken est très particulière :
– Soit il avance d'un pas en avant ;
– soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas en avant) ;
– soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas en avant).
On suppose de plus que ces trois déplacements possibles sont aléatoires et équiprobables.
On suppose également que Ken se trouve au milieu du pont au début de la traversée.
On cherche à déterminer une estimation de la probabilité de l'événement « Ken réussit à traverser le pont sans tomber à l'eau » (c'est à dire de l'événement « Ken se trouve encore sur le pont après 15 déplacements »)

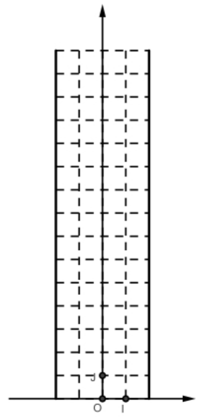


Un exemple d'une traversée réussie

A : Une première méthode en utilisant un algorithme

On munit la figure représentant le pont d'un repère orthonormé (O; I,J) comme l'indique la figure ci-dessous et on considère l'algorithme dont on donne le début ci-après, qui simule une tentative de traversée du pont :

Variables : …................
Début de l'algorithme :
x Prend la valeur 0
y Prend la valeur 0
Tant que $x \geq .... \ et \ x \leq 2 \ et \ y \leq 15$
Début Tant que
n prend une valeur aléatoire entière qui est -1 ; 0 ou 1
x prend la valeur …............
y prend la valeur …............
Fin Tant que
…...
…...
Fin de l'algorithme



1) Complétez cet algorithme pour que le texte « Traversée réussie » soit renvoyé si la traversée est réussie, et « Plouf » dans le cas contraire .
2) Complétez et/ou modifiez cet algorithme afin que son exécution simule 10000 tentatives de traversée et renvoie la fréquence de traversées réussies.
3) En prenant la fréquence *f* de traversées réussies après 10000 simulations comme valeur approchée de la probabilité cherchée, quelle précision peut-on espérer ?
4) Programmer cet algorithme sur ALGOBOX et donner un encadrement de la probabilité cherchée.

B : En utilisant les suites

On travaille dans cette partie avec le repère de la partie A.
Pour tout entier naturel *n* compris entre 0 et 15, on note :
A_n l'événement « Après *n* déplacements, Ken se trouve sur un point d'abscisse −2 »
B_n l'événement « Après *n* déplacements, Ken se trouve sur un point d'abscisse −1 »
C_n l'événement « Après *n* déplacements, Ken se trouve sur un point d'abscisse 0 »
D_n l'événement « Après *n* déplacements, Ken se trouve sur un point d'abscisse 1 »
E_n l'événement « Après *n* déplacements, Ken se trouve sur un point d'abscisse 2 »
On note a_n, b_n, c_n, d_n et e_n les probabilités respectives de A_n, B_n, C_n, D_n et E_n.

1) Déterminer a_0, b_0, c_0, d_0 et e_0.

2) Montrez que pour tout entier n compris entre 0 et 15 : $$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{3} \\ b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n+c_n}{3} \\ c_{n+1}=\dfrac{b_n+c_n+d_n}{3} \\ d_{n+1}=\dfrac{c_n+d_n+e_n}{3} \\ e_{n+1}=\dfrac{d_n+e_n}{3} \end{cases}$$

3) A l'aide d'un tableur (OpenOffice), déterminez les valeurs des termes des suites considérées.
4) En déduire la probabilité que Ken réussisse à traverser le pont et vérifier que cette valeur appartient à l'intervalle de confiance de la partie A)

source :IREM de Lorraine