

♠ Une histoire pour commencer 1.

Quand vous étiez petits, vous ne connaissiez que les entiers naturels... et l'équation $x + 1 = 0$ n'avait pas de solutions. Puis sont arrivés les entiers relatifs qui résolvait ce problème... mais l'équation $2x + 1 = 0$ n'avait pas de solutions. Puis sont arrivés les rationnels (=fractions) qui résolvait ce problème ... mais l'équation $x^2 = 3$ n'avait pas de solutions.

Puis sont arrivés les réels qui résolvait ce problème ... mais l'équation $x^2 = -1$ n'avait pas de solutions.

On en est là... What's next ?

♠ Encore une histoire 2. Ex 95 et 96 p 253 Déclic

[Source : G Costantini]

Au début du XVI^{ème} siècle, le mathématicien Scipione dal Ferro, propose une formule donnant une solution de l'équation du 3^{ème} degré $x^3 + px = q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + 4p^3}}{27}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4p^3}}{27}}$$

A la fin du XVI^{ème} siècle, le mathématicien Bombelli applique cette formule à l'équation $x^3 - 15x = 4$.

Il obtient littéralement :

$$x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

Cette écriture n'a, *a priori*, pas de sens puisqu'on ne sait pas ce que représente le symbole noté $\sqrt{-1}$.

Mais Bombelli va plus loin. Il remarque, en utilisant les règles usuelles de calcul que :

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

Si bien qu'il obtient finalement : $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$

Or, $x = 4$ est bien une solution de l'équation $x^3 - 15x = 4$.

Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessus ? C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes...

Introduction :

On va donc, dans ce chapitre « construire ? » ou plutôt imaginer un ensemble plus grand que \mathbb{R} dans lequel l'équation $x^2 + 1 = 0$ possède des solutions. On l'appellera \mathbb{C} : ensemble des nombres complexes. Le principal élément de \mathbb{C} sera noté i (i comme imaginaire). Le nombre i est tel que $i^2 = -1$! L'équation $x^2 + 1 = 0$ possède alors deux solutions :

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - i^2 = 0 \Leftrightarrow (x+i)(x-i) = 0 \Leftrightarrow x = i \text{ ou } x = -i.$$

I. Définitions

Théorème 1 : On admet qu'il existe un ensemble \mathbb{C} contenant \mathbb{R} et vérifiant :

- \mathbb{C} est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de \mathbb{R} et suivent les mêmes règles de calcul (commutativité, distributivité).
- Il existe un élément i de \mathbb{C} tel que $i^2 = -1$
- Tout élément z de \mathbb{C} s'écrit de manière unique $z = x + iy$ avec x et y réels.

♠ Exemple 3. $-14 + 89i \in \mathbb{C}$; $2 + i\sqrt{3} \in \mathbb{C}$; $-5 = -5 + 0i \in \mathbb{C}$; $\frac{4}{3}i = 0 + \frac{4}{3}i \in \mathbb{C}$.

Pourquoi i et pas $\sqrt{-1}$? On n'a pas gardé la notation $\sqrt{-1}$ car elle laisse penser que les règles habituelles sur les racines carrées sont applicables et on arrive à $-1 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = 1$. (Dans la réalité, il a fallu 150 ans pour abandonner cette notation et adopter la notation i proposée par Euler.)

A. Vocabulaire

Définitions 2:

- \mathbb{C} s'appelle l'ensemble des **nombre complexes** ;
- La forme $z = x + iy$ (où x et y sont réels) est la **forme algébrique** de z ;
- Le réel x est la **partie réelle de z** , on la note **$Re(z)$** ou parfois $\Re(z)$;
- Le réel y est la **partie imaginaire de z** , on la note **$Im(z)$** ou parfois $\Im(z)$;
- Si $Im(z) = 0$, alors z est un réel ;
- Si $Re(z) = 0$, alors z s'écrit $z = iy$ et on dit que z est un **imaginaire pur**.

Attention ! La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel ! (La partie réelle aussi mais ça, ça n'étonne personne...)

♣ Exemple 4. Complétez :

- 1) Si $z = -3 + 8i$, alors $Re(z) = \dots\dots$ et $Im(z) = \dots\dots$
- 2) Si $z = -3i + 17$, alors $Re(z) = \dots\dots$ et $Im(z) = \dots\dots$
- 3) Si $z = 25$, alors $Re(z) = \dots\dots$ et $Im(z) = \dots\dots$
- 4) Si $z = -6,9i$, alors $Re(z) = \dots\dots$ et $Im(z) = \dots\dots$
- 5) Si $z = 0$, alors $Re(z) = \dots\dots$ et $Im(z) = \dots\dots$

B. Égalité de deux nombres complexes : Deux équations (de variables réelles) pour le prix d'une (de variable complexe) !

Propriété 3.

- Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire. Donc, pour x, y, x' et y' réels, $x + iy = x' + iy'$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$.
→ Autrement dit, l'écriture d'un complexe sous forme algébrique est unique. Voilà pourquoi on parle de LA forme algébrique d'un complexe.
- En particulier, $x + iy = 0$ équivaut à $x = 0$ et $y = 0$.

♣ Exemple 5. Déterminer les nombres REELS x et y tels $2x + y - 1 + i(x + 8) = x - 3y + i(2y - 3)$

C. Qu'est ce qu'on a gagné et perdu en passant des réels aux complexes?

▪ **Ce qu'on a gagné** : Certaines équations qui n'avaient pas de solutions dans \mathbb{R} et en ont maintenant dans \mathbb{C} , comme par exemple $x^2 = -1$ ou $4x^2 + 5 = 0$. En fait, on peut même prouver² que tout polynôme $P(z)$ à coefficient réels ou complexes de degré supérieur ou égal à 1 peut se factoriser dans \mathbb{C} comme produit de facteurs de degré 1, c'ad de la forme $az + b$ où $a, b \in \mathbb{C}$. Autrement dit, c'est la fin de la course aux ensembles de nombres (c.f. Une histoire pour commencer 1) puisqu'on peut résoudre dans \mathbb{C} toutes les équations de la forme $P(z) = 0$ où P est un polynôme à coefficient réels ou complexes. Modérons notre enthousiasme : c'est juste un théorème d'existence (comme le théorème des valeurs intermédiaires par exemple) ; on sait que les racines existent dans \mathbb{C} mais on ne sait pas forcément les trouver. On dispose de formules donnant les solutions des équations polynomiales réelles ou complexes de degré inférieur ou égal à 4 en fonction de leurs coefficients mais Abel et Galois (vous savez, celui qui est mort tué en duel) ont montré qu'il n'est pas possible de trouver de telles formules générales (n'utilisant que les quatre opérations usuelles et les racines) pour les équations de degré 5 ou plus.

▪ **Ce qu'on a perdu** : La possibilité de comparer des nombres et de les classer : Écrire $z_1 \leq z_2$ n'a en général pas de sens³ pour des nombres complexes !

En particulier, on a perdu la notion de signe : Un nombre complexe n'a pas de signe (sauf s'il est réel). On n'a plus ni nombres positifs et ni nombres négatifs !! (sauf pour les complexes qui sont en fait des réels) puisqu'on ne peut plus écrire $z \geq 0$ ou $z \leq 0$. Envolé donc tout ce qui va avec les signes : la règle des signes, les tableaux de signes, les manipulation d'inégalités, les majorations, la notion de suite croissante (pour une suite de nombres complexes)... etc. Un autre monde, quoi !

¹ On verra plus tard qu'un complexe peut s'écrire de plusieurs façons.

² C'est le théorème de d'Alembert-Gauss.

³ On pourrait poser $z_1 > z_2$ ssi $(x_1 > x_2)$ ou $(x_1 = x_2 \text{ et } y_1 > y_2)$ mais les règles habituelles de manipulations d'égalités ne se généralisent pas. On laisse donc tomber cette idée.

D. Petits calculs dans l'ensemble des nombres complexes

L'idée est que les opérations dans \mathbb{C} ont été définies pour que tout marche comme dans \mathbb{R} . Voyons ce que cela donne en pratique :

♣ Exemple 6. Complétez : Si $z_1 = -3 + 8i$ et $z_2 = \frac{14 - 59i}{i}$, alors $z_1 + z_2 = \dots\dots$

Calculs :

Coup de pouce: Pour trouver la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe, on commence par le mettre sous forme algébrique. Ici pour avoir 1 au dénominateur de z_2 , il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur de z_2 par i .

♣ Exemple 7. Complétez : $z = (3 - 2i)(-5 + 7i)$ a pour forme algébrique $\dots\dots$

Calculs : $(3 - 2i)(-5 + 7i) =$

Point-méthode 4: Pour multiplier des nombres complexes donnés sous forme algébrique, on utilise la (double) distributivité et le fait que $i^2 = -1$.

Remarque 5. La multiplication dans \mathbb{C} est distributive par rapport à l'addition ce qui entraîne que les **identités remarquables** sont encore vraies dans \mathbb{C} :

Quels que soient les nombres complexes a et b , $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Propriété 6. (très utile pour résoudre des équations-produits !)

Quels que soient les nombres complexes z et z' , $z \times z' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$.

Dem : ex 43 p 241 Déclic

♣ Exemple 8.

- 1) Mettre $(3 + 5i)^2$ sous forme algébrique.
- 2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $30i - 16 - 9z^2 = 0$.
- 3) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $30i - 16 + z^2 = 0$.

II. Conjugué d'un nombre complexe

Définition 7. Soit z un nombre complexe; $z = x + iy$ avec x et y réels.

On appelle **conjugué de z** le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$.

→ Autrement dit, le conjugué d'un complexe s'obtient en gardant sa partie réelle et en remplaçant sa partie imaginaire par son opposé.

♣ Exemple 9.

- 1) Le conjugué de $z_1 = 5 - 3i$ est $\bar{z}_1 = \dots\dots\dots$
- 2) Le conjugué de $z_2 = i4\sqrt{3}$ est $\bar{z}_2 = \dots\dots\dots$
- 3) Le conjugué de $z_3 = 56$ est $\bar{z}_3 = \dots\dots\dots$
- 4) Le conjugué de $z_4 = \frac{(1+i)(2-3i)}{i}$ est $\bar{z}_4 = \dots\dots\dots$

♣ Exemple 10. Mettre sous forme algébrique le complexe $\frac{1+i}{3-4i}$.

Solution : $\frac{1+i}{3-4i} = \frac{(1+i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i+3i-4}{3^2+4^2} = \frac{-1}{25} + i\frac{7}{25}$.

Point-méthode 8: Pour mettre un complexe qui se présente comme un quotient sous forme algébrique, on peut multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

A vous ! Donner la forme algébrique de $z = \frac{2+3i}{4-5i}$.

A. Propriétés permettant de caractériser les imaginaires purs et les réels

♣ Exercice 11. $\forall z \in \mathbb{C}$, exprimer les quantités suivantes en fonction de $\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z)$

- 1) $z + \bar{z} = \dots\dots\dots$
- 2) $z - \bar{z} = \dots\dots\dots$

Caractérisation des imaginaires purs et des réels.

P 9 • z est réel équivaut à $z = \bar{z}$ c'est à dire $z - \bar{z} = 0$.

P 10 • z est imaginaire pur (on note $z \in i\mathbb{R}$) équivaut à $z = -\bar{z}$ c'est à dire $z + \bar{z} = 0$.

Autrement dit, $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$.

C'est très simple à utiliser:

- Pour savoir si un complexe est en fait un réel, on calcule $z - \bar{z}$. Si on obtient 0, z est réel et si on n'obtient pas 0, z n'est pas réel.
- Même idée pour savoir si un complexe est un imaginaire pur : on calcule $z + \bar{z}$...etc.

B. Lien inverse / conjugué

Propriété 11. Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on a $z\bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$, d'où, si $z \neq 0$,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

♣ Exemple 12.

- 1) L'inverse de $z_1 = 5 - 3i$ a pour forme algébrique $\frac{1}{z_1} = \dots\dots\dots$
- 2) L'inverse de $z_2 = \frac{2+i}{i}$ a pour forme algébrique $\frac{1}{z_2} = \dots\dots\dots$

C. Effet de la conjugaison sur les opérations

Propriété 12. Pour tous les nombres complexes z et z' et pour tout entier n :

• $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ • $\overline{(-z)} = -\bar{z}$ • $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$ • $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

si de plus $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.

→ On dit que l'opération de conjugaison est compatible avec l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'élevation à une puissance.

Dem : ex 42 p 241 Déclic

III. Équation du second degré à coefficients réels

Propriété 13. On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ à résoudre dans \mathbb{C} avec a, b et c réels et a non nul. On appelle **discriminant** de cette équation le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$. C'est un réel puisque a, b et c sont des réels.

Rappel, mise sous forme canonique: $az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$.

• Si $\Delta > 0$, alors l'équation a deux racines réelles $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une racine réelle double $z_0 = -\frac{b}{2a}$.

• Si $\Delta < 0$, alors l'équation a deux racines complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Remarque 14. Si P est un polynôme à coefficients réels et si z_0 est une racine de P alors \bar{z}_0 , le conjugué de z_0 est lui aussi solution de l'équation $P(x) = 0$.

IV. Représentation géométrique des nombres complexes

L'idée : De même que l'on peut représenter les réels (sur une droite), on peut représenter les complexes, mais il faut le faire dans le plan. On peut représenter un complexe soit par un point du plan soit par un vecteur du plan. Commençons par la représentation par un point.

Dans tout ce paragraphe, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (on choisit $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ plutôt que $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ pour éviter les confusions entre le vecteur \vec{i} et le nombre complexe i).

A. Représentation d'un nombre complexe par un point du plan complexe

Définitions 15:

- A chaque point M du plan de coordonnées $(x ; y)$ on associe le nombre complexe $z = x + iy$. On dit que z est l'**affiche** du point M et on le note z_M .
- Réciproquement, à chaque nombre complexe $z = x + iy$, on associe un unique point du plan, le point M de coordonnées $(x ; y)$. On dit que M est le point **d'affiche** z et on note $M(z)$.
- Le plan muni d'un repère orthonormé direct dans lequel on représente des nombres complexes est appelé **le plan complexe**. L'axe des ordonnées est appelé **l'axe des imaginaires purs** et l'axe des abscisses est appelé **l'axe des réels**.

♣ Exemple 13.

1) Lire sur le dessin l'affiche du point D.

.....

2) Soit $z = 3 - 2i$. Placer sur le dessin ci-contre le point M d'affiche z , puis placer $M_1(\bar{z})$,

$M_2(-z)$ et $M_3(-\bar{z})$. [Configuration du rectangle]

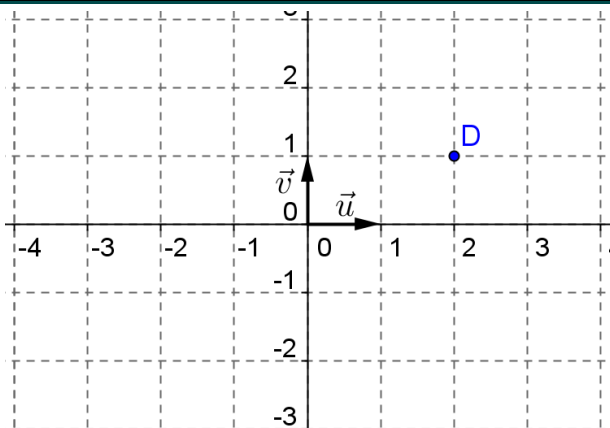
3) Compléter les phrases suivantes :

a) Si des points ont pour affixes des complexes conjugués, alors ces points sont

.....

b) Si des points ont pour affixes des complexes opposés, alors ces points sont

On peut aussi représenter un complexe par un vecteur du plan. Voyons comment :



B. Représentation d'un nombre complexe par un vecteur du plan complexe

Définitions 16:

- A chaque vecteur \vec{w} du plan de coordonnées $(x ; y)$ on associe le nombre complexe $z = x + iy$. On dit que z est l'**affiche** du vecteur \vec{w} et on le note $z_{\vec{w}}$.
- A chaque nombre complexe $z = x + iy$, on associe le vecteur \vec{w} de coordonnées $(x ; y)$. On dit que \vec{w} est le vecteur **d'affiche** z .

Propriétés. Pour tous vecteurs \vec{w} et \vec{w}' d'affixes respectives $z_{\vec{w}}$ et $z_{\vec{w}'}$ et tout réel λ

P 17 ▪ L'affiche du vecteur $\vec{w} + \vec{w}'$ est la somme des affixes de \vec{w} et \vec{w}' , ce qui peut s'écrire

$$z_{\vec{w} + \vec{w}'} = z_{\vec{w}} + z_{\vec{w}'}$$

P 18 ▪ L'affiche du vecteur $\lambda \vec{w}$ est le produit de λ par l'affiche de \vec{w} , ce qui peut s'écrire

$$z_{\lambda \vec{w}} = \lambda z_{\vec{w}}$$

♣ Exemple 14. Si \vec{w}_1 a pour affiche $3 - 2i$ et \vec{w}_2 a pour affiche $-4 + i$ alors $\vec{w} = \vec{w}_1 - 5\vec{w}_2$ a pour affiche

Propriétés. Étant donnés deux points A et B du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B ,

P 19 ▪ L'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$;

P 20 ▪ L'affixe du milieu I de [AB] est $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$.

♣ Exemple 15. A, B et C sont trois points d'affixes respectives $3-i, 2+2i$ et $-1+i$. Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

Démonstrations des propriétés 17 à 20:

Ce ne sont que des reformulations en termes de complexes des propriétés bien connues :

Ainsi P17 ne fait que dire que si \vec{w} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (ce qui s'écrit $z_{\vec{w}} = \dots$) et \vec{w}' a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ (ce qui s'écrit $z_{\vec{w}'} = \dots$) alors $\vec{w} + \vec{w}'$ a pour coordonnées \dots (ce qui s'écrit $z_{\vec{w} + \vec{w}'} = \dots$)

P18 ne fait que dire que si \vec{w} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (ce qui s'écrit $z_{\vec{w}} = \dots$) alors $\lambda \vec{w}$ a pour coordonnées \dots (ce qui s'écrit $z_{\lambda \vec{w}} = \dots$)

Démonstrations des propriétés 19 et 20: ex 43 p 241 Déclic

C. Module d'un nombre complexe

Définitions 21:

- Le **module** du nombre complexe $z = x + iy$, noté $|z|$, est le réel positif ou nul $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- **Interprétation géométrique** : Le module de z est égal à la distance OM où M est le point d'affixe z . Le module de z est aussi égal à la norme du vecteur \vec{w} d'affixe z , c'à d $|z| = OM = \|\vec{w}\|$

♣ Exemple 16. Si \vec{w}_1 a pour affixe $3-2i$ et \vec{w}_2 a pour affixe $-4+i$ alors \vec{w}_1 et \vec{w}_2 ont pour normes respectives : \dots

Propriétés.

P 22 ▪ $\forall z \in \mathbb{C}, |\bar{z}| = |z|$

P 23 ▪ On peut reformuler la propriété 11: $\forall z \in \mathbb{C}, z \cdot \bar{z} = |z|^2$

P 24 ▪ et son corollaire: L'inverse d'un complexe z non nul est $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$;

P 25 ▪ Dans un repère orthonormé, on peut aussi réécrire la formule qui donne la **distance** entre deux points A et B comme le module du complexe $z_B - z_A$, c'à d $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$.

Remarque : Cette formule est une généralisation de celle qui donne la distance entre deux réels : Étant donnés deux réels a et b , la distance entre ces deux réels est $AB = |a - b|$ (valeur absolue).

♣ Exemple 17. A est le point du plan complexe d'affixe $\sqrt{3} - 2i$.

1) Quel est le lieu des points M du plan complexe tels que $|z_M - z_A| = 2\sqrt{3}$?

2) B est le point du plan complexe d'affixe $2\sqrt{3} - 5i$. Quel est le lieu des points N du plan complexe tels que $|z_N - z_A| = |z_N - z_B|$?

3) Quel est le lieu des points P du plan complexe tels que $|z_P - z_B| = 3 - 2\sqrt{3}$?

4) Quel est le lieu des points R du plan complexe tels que $|z_R + 2 - 3i| = 8$?

Propriété 26. Pour tous les nombres complexes z et z' , $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

Remarque 27. $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = |\bar{z}|$ et, si z est non nul, $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$

♣ Exemple 18. Soit $z \in \mathbb{C}$. Calculer le module de $Z = \frac{1+i\bar{z}}{i+z}$.

Sources : Labomath ; Manuel Repères ; Manuel Hyperbole ; Site de G. Costantini, Manuel Déclic.

Table des matières

I. Définitions	1
A. Vocabulaire.....	2
B. Égalité de deux nombres complexes : Deux équations (de variables réelles) pour le prix d'une (de variable complexe) !.....	2
C. Qu'est ce qu'on a gagné et perdu en passant des réels aux complexes?.....	2
D. Petits calculs dans l'ensemble des nombres complexes.....	3
II. Conjugué d'un nombre complexe	3
A. Propriétés permettant de caractériser les imaginaires purs et les réels.....	4
B. Lien inverse / conjugué.....	4
C. Effet de la conjugaison sur les opérations.....	4
III. Équation du second degré à coefficients réels	4
IV. Représentation géométrique des nombres complexes	5
A. Représentation d'un nombre complexe par un point du plan complexe.....	5
B. Représentation d'un nombre complexe par un vecteur du plan complexe.....	5
C. Module d'un nombre complexe.....	6

Le programme officiel

Nombres complexes

En classe terminale, les nombres complexes sont vus essentiellement comme constituant un nouvel ensemble de nombres avec ses opérations propres. Cette introduction s'inscrit dans la perspective d'un approfondissement lors d'une poursuite d'études.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Forme algébrique, conjugué. Somme, produit, quotient. Équation du second degré à coefficients réels. Représentation géométrique. Affixe d'un point, d'un vecteur. Forme trigonométrique : - module et argument, interprétation géométrique dans un repère orthonormé direct ; - notation exponentielle.	<ul style="list-style-type: none"> • Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes. • Résoudre dans \mathbb{C} une équation du second degré à coefficients réels. • Représenter un nombre complexe par un point ou un vecteur. • Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur. • Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement. • Connaître et utiliser la relation $z \bar{z} = z ^2$. • Effectuer des opérations sur les nombres complexes écrits sous différentes formes. 	On introduit dans ce chapitre des éléments lui donnant une dimension historique. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. La notation exponentielle est introduite après avoir montré que la fonction $\theta \mapsto \cos \theta + i \sin \theta$ vérifie la même relation fonctionnelle que la fonction exponentielle. Les nombres complexes permettent de mémoriser les formules trigonométriques d'addition et de duplication vues en première. \Leftrightarrow [SI] Analyse fréquentielle d'un système.

Notre progression :

Partie I Nombres complexes

- position du problème
- forme algébrique d'un nombre complexe
- équation du second degré
- affixe d'un point, d'un vecteur

6A.

Partie II

Forme trigonométrique, module, argument

$$\arg \frac{a-b}{c-d}$$

Attention : Les transformations ne sont plus au programme.