Nombres complexes, Partie II | T.S.

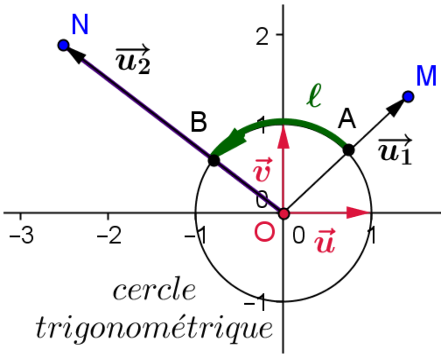
♠ Pour commencer 1. Ex 4 p 225 de Déclic sur les coordonnées polaires.

I. Rappels sur les angles orientés

A. Mesures de l'angle orienté formé par deux vecteurs

Idée : L'angle orienté $(\vec{u_1};\vec{u_2})$ est l'angle dont on tourne pour aller du vecteur $\vec{u_1}$ au vecteur $\vec{u_2}$, en tournant dans le sens trigonométrique. Il n'est défini que si les deux vecteurs sont non nuls. Plus précisément :

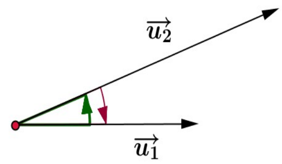
Définition 1. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
$\vec{u_1}=\overrightarrow{OM}$ et $\vec{u_2}=\overrightarrow{ON}$ sont deux vecteurs non nuls. Les demi-droites [OM) et [ON) coupent le cercle trigonométrique en deux points A et B. Au couple $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$, on associe une famille de nombres de la forme $\ell+2k\pi$, ($k\in\mathbb{Z}$), où ℓ est la longueur ($\ell\geqslant 0$) de l'arc de cercle AB, parcouru de A vers B dans le sens direct.
Chacun de ces nombres est une mesure en radians de l'angle orienté des vecteurs $(\vec{u_1};\vec{u_2})$.



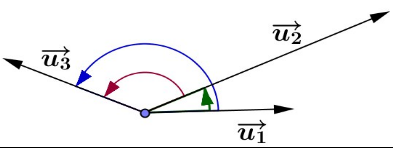
Propriété 2. Un angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$ a une unique mesure θ appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$, on l'appelle ***mesure principale*** de l'angle.
Les autres mesures sont les réels $\theta+2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

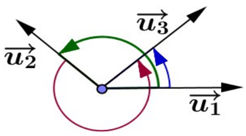
B. Propriétés des angles orientés

Propriétés 3. : $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ sont des vecteurs non nuls.
- $(\vec{u_1};\vec{u_2})=-(\vec{u_2};\vec{u_1})+2k\pi$
- $(-\vec{u_1};\vec{u_2})=(\vec{u_1};\vec{u_2})+\pi+2k\pi$ et $(\vec{u_1};-\vec{u_2})=(\vec{u_1};\vec{u_2})+\pi+2k\pi$
- $(\vec{u_1};\vec{u_2})+(\vec{u_2};\vec{u_3})=(\vec{u_1};\vec{u_3})+2k\pi$ **(Relation de Chasles)**



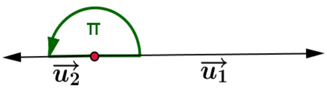
Deux illustrations de la Relation de Chasles :





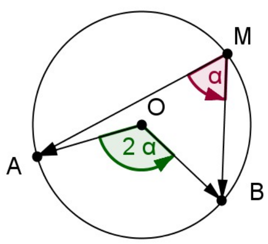
Propriété 4. Les vecteurs non nuls $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont colinéaires
$\Leftrightarrow (\vec{u_1};\vec{u_2})=0+2k\pi$ [colinéaires et de même sens] ou $(\vec{u_1};\vec{u_2})=\pi+2k\pi$ [colinéaires et de sens opposé]
$\Leftrightarrow (\vec{u_1};\vec{u_2})=k\pi$

Illustration : vecteurs colinéaires et de sens opposé :



Propriété 5. Soit C un cercle de centre O passant par A et B. Pour tout point M du cercle différent de A et B, on a :
$$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=2(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})+2k\pi$$
« *L'angle au centre est le double de l'angle inscrit à 2π près* ».

Autrement dit, en divisant par 2 *(y compris le $2k\pi$!)*,
$$(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})+k\pi$$
« *L'angle inscrit est la moitié de l'angle au centre à π près* ».



II. Module et argument d'un nombre complexe.

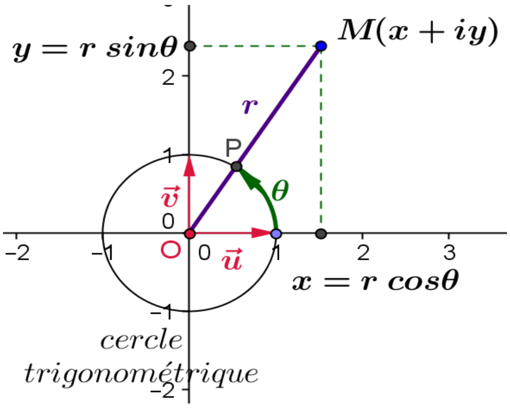
Dans tout ce qui suit le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

A. Coordonnées polaires d'un point du plan

Soit M un point du plan différent de l'origine (On impose $M \neq O$ pour avoir $\overrightarrow{OM} \neq \vec{0}$ sinon l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ n'est pas défini). On peut repérer la position de ce point de deux façons :

- *soit* par son abscisse et son ordonnée qui sont les ***coordonnées cartésiennes*** du point. Notons que ces coordonnées se lisent directement dans l'écriture algébrique du nombre complexe affixe de M. (Rappel : ***écriture algébrique*** : $z = x + iy$ où $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$)
- *soit* avec la longueur OM et une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ qui sont les ***coordonnées polaires*** du point. Cela donnera une autre façon d'écrire le nombre complexe d'affixe M sur laquelle OM et l'angle orienté se voient directement.

Définitions 6. Le point M, autre que O, a pour ***coordonnées polaires*** (r, θ) dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ signifie que :
- $r = OM$
- θ est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. θ est défini à 2π près.



P est un point du cercle trigonométrique dont la position sur le cercle est repérée par le réel θ, il a donc pour coordonnées $(\cos\theta ; \sin\theta)$. De plus, $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{OP}$ où $r = OM$. Le point M a donc pour coordonnées $(r\cos\theta ; r\sin\theta)$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Lien entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes d'un point du plan 7.

Coordonnées cartésiennes	Passage d'une forme à l'autre	Coordonnées polaires
Coordonnées cartésiennes = (x, y) $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$	$x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$ $\longleftarrow$ $\longrightarrow$ $r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$	Coordonnées polaires = (r, θ) $M\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$

B. Application aux nombres complexes : Module et argument d'un nombre complexe non nul

Notation : « $\theta = \theta' + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ » peut aussi se noter « $\theta = \theta' \ (mod\ 2\pi)$ »

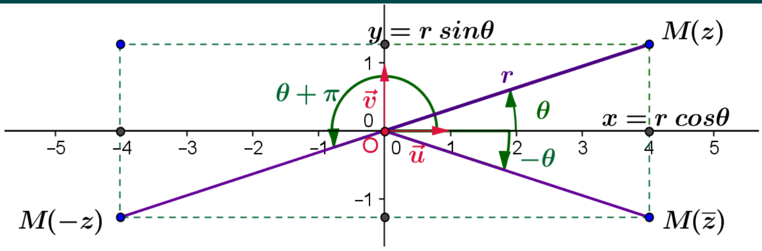
Définitions 8. Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + iy$ et soit M le point d'affixe z. (On impose z non nul pour avoir $\overrightarrow{OM} \neq \vec{0}$ sinon l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ n'est pas défini)

Soient (r, θ) les coordonnées polaires du point M d'affixe z. Nous dirons que
- $r = OM$ est ***le module de z*** et on le note $|z|$.
- θ, qui est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ est ***un argument de z***.

  On note $\boldsymbol{arg}(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi$. Notons que θ est défini à 2π près.
- Comme précédemment, pour passer de (x, y) à (r, θ) et réciproquement, on a $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$.

Premières propriétés du module et de l'argument d'un nombre complexe Rappel :**[P9]** $\forall z \in \mathbb{C}$, $\lvert z\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$ et $\lvert z\rvert^2=z\bar{z}$		
	Module	**Argument** Seuls les complexes <u>non nuls</u> ont un argument, d'où les $\mathbb{C}^*$ (= $\mathbb{C}$ privé de 0) qui apparaissent dans les formules ci-dessous)
Conjugué	**[P10]** $\forall z \in \mathbb{C}$, $\lvert\bar{z}\rvert=\lvert z\rvert$	**[P11]** $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $arg(\bar{z})=-arg(z)$.
Opposé	**[P12]** $\forall z \in \mathbb{C}$, $\lvert -z\rvert=\lvert z\rvert$	**[P13]** $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $arg(-z)=arg(z)+\pi$.

Illustration :



<u>Caractérisation des réels et des imaginaires purs au moyen de l'argument</u> [P14].

▪ Un complexe z <u>non nul</u> est **réel** ssi $arg(z)=0+2k\pi$ [z est un réel strictement positif]
ou $arg(z)=\pi+2k\pi$ [z est un réel strictement négatif].

Formulation condensée : Un complexe z <u>non nul</u> est **réel** ssi $arg(z)=\underline{k}\pi$.

▪ Un complexe z <u>non nul</u> est **imaginaire pur** ssi $arg(z)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $arg(z)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Formulation condensée : Un complexe z <u>non nul</u> est **imaginaire pur** ssi $arg(z)=\frac{\pi}{2}+\underline{k}\pi$.

C. <u>Forme trigonométrique d'un nombre complexe</u>

<u>Propriétés et définition</u>. Soit z un nombre complexe non nul.

▪ **[P15]** Si $r=\lvert z\rvert$ et $\theta=arg(z)$, alors $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ (car $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$).

▪ **[D16]** La forme $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $r>0$ est appelée ***forme trigonométrique de z***.

▪ **[P17]** Si $r>0$ et $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, alors $r=\lvert z\rvert$ et $\theta=arg(z)$. (La forme trigonométrique permet donc de lire directement le module et un argument de z)

▪ **[P18]** Si $r(\cos\theta+i\sin\theta)=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ avec $r>0$ et $r'>0$, alors $r=r'$ et $\theta=\theta'(mod\ 2\pi)$.

♠ <u>Exemples 2.</u>

1) Déterminer la forme trigonométrique de $z_1=-1+i\sqrt{3}$.

Solution : On a $\lvert z_1\rvert=\sqrt{1+3}=2$. *D'où* $z_1=2\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

2) Déterminer la forme trigonométrique de $z_2=2+i$.

Solution : On a $\lvert z_2\rvert=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$. *D'où* $z_2=\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+i\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ *; ceci est la forme trigonométrique, il existe un réel* θ *tel que* $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ *et* $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ *mais il n'a pas une forme simple,* $\theta\approx0{,}46$.

♠ <u>Exemples 3.</u>

1) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ n'est pas la forme trigonométrique *(à cause du signe « - » devant le sinus)*. La forme trigonométrique de ce complexe est : . . . . . .

2) $z=-2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ n'est pas la forme trigonométrique *(le nombre est en facteur n'est pas positif)*. La forme trigonométrique de ce complexe est : . . . . . .

III. Effet des opérations sur le module et l'argument

A. Module d'une somme : Inégalité triangulaire

Propriété 19. **Inégalité triangulaire** : Quels que soient les complexes z et z' : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

B. Produit

Propriété 20. Pour tous nombres complexes non nuls z et z' :
- $|zz'|=|z||z'|$
- $arg(zz')=arg(z)+arg(z')$.

Démonstration : Soient $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ *et* $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$.
$zz'=rr'(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'+i(\cos\theta\sin\theta'-\sin\theta\cos\theta'))=rr'(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta'))$.
D'où, par P17, $|zz'|=rr'=|z||z'|$ *et* $arg(zz')=\theta+\theta'=arg(z)+arg(z')$.

On en déduit par récurrence :

Propriété 21.
- Pour tout entier naturel non nul n, $|z^n|=|z|^n$ et $arg(z^n)=n\times arg(z)$.
- En particulier, on a la ***formule de Moivre*** : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.

Démonstration :

C. Quotient

Propriété 22. Pour tous nombres complexes non nuls z et z' :

$\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ et $arg\left(\frac{z}{z'}\right)=arg(z)-arg(z')$

Démonstration :

D. Lien avec le plan complexe : Vital pour les exercices !

Propriété 23. Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
- Si A et B sont des points distincts d'affixes a et b, alors AB = |b-a |, et $(\vec{u},\overrightarrow{AB})=arg(b-a)$.
- Si A, B, C et D sont 4 points d'affixes a, b, c et d, avec a ≠b et c ≠ d alors $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$.

Démonstration : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{AB},\vec{u})+(\vec{u},\overrightarrow{CD})$ $= - arg(b-a) + arg(d-c) = arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$.

Remarque : Voir la dernière page pour un récapitulatif des formules.

IV. Notation exponentielle

A. Tiens ??? Une fonction qui transforme les sommes en produits ?!? Cela me rappelle quelque chose

Soit $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \cos x+i\sin x \end{array}$. (*Cela fait longtemps que je ne vous avais pas présenté une nouvelle lettre grecque, celle-si se lit « psi ».*) La fonction ψ vérifie $\psi(\theta+\theta')=\psi(\theta)\times\psi(\theta')$ (vu dans la démonstration du fait qu'un argument d'un produit est la somme des arguments). Ceci nous donne l'idée d'adopter une notation ressemble à celle de la fonction exponentielle

B. ....d'où la notation exponentielle

Définitions 24: Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \cos\theta+i\sin\theta$.

On se permettra d'utiliser cette notation après avoir vérifié que les résultats démontrés sur les arguments correspondent bien aux règles de maniement de l'exponentielle (voir P25).

♠ Exemples 4.

1. $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ (c'est la formule d'Euler, souvent considérée comme la plus belle formule des mathématiques)
2. $e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$
3. $e^{2i\pi/3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

♠ Exemples 5. Exprimer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

C. Propriétés reformulées avec cette nouvelle notation : Ça colle !

Propriété 25. Pour tous les réels θ et θ', et tout entier naturel n :

- $|e^{i\theta}| = 1$ et $arg(e^{i\theta}) = \theta$: $e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.
- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$, $\overline{(e^{i\theta})} = e^{\overline{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Ce sont les règles donnant l'argument d'un produit, d'un quotient et du conjugué ainsi que la formule de Moivre réécrites avec cette nouvelle notation. Les résultats démontrés sur les arguments se reformulent donc de façon compatible avec toutes les règles usuelles de calcul avec les exponentielles et voilà pourquoi on a adopté cette notation.

♠ Application 6. $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$ *permet de retrouver rapidement les formules d'addition* $\cos(a+b) = ...$ *et* $\sin(a+b) = ...$

Les principales formules de calcul

	Module	**Argument** Remarque : Seuls les complexes <u>non nuls</u> ont un argument, d'où les $\mathbb{C}^*$ (= $\mathbb{C}$ privé de 0) qui apparaissent dans toutes les formules ci-dessous)	On résume ces deux colonnes en donnant ces formules avec les complexes écrits sous **forme exponentielle**
Produit	▪ $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $\lvert z \times z' \rvert = \lvert z \rvert \times \lvert z' \rvert$ *conduit par récurrence à :* ▪ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n$.	▪ $\forall z, z' \in \mathbb{C}^*$, $arg(z z') = arg(z) + arg(z')$. *conduit par récurrence à :* ▪ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $arg(z^n) = n \times arg(z)$. ▪ ***formule de Moivre*** : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$	$\forall r, r', \theta, \theta' \in \mathbb{R}$ ▪ $z z' = r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta+\theta')}$ ▪ $z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{i n\theta}$
Quotient	$\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}^*$, $\left\lvert \frac{z}{z'} \right\rvert = \frac{\lvert z \rvert}{\lvert z' \rvert}$	$\forall z, z' \in \mathbb{C}^*$, $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$	$\forall r, r', \theta, \theta' \in \mathbb{R}, r' \neq 0$ $\frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$
Conjugué	$\forall z \in \mathbb{C}$, $\lvert \bar{z} \rvert = \lvert z \rvert$	$\forall z \in \mathbb{C}^*$, $arg(\bar{z}) = -arg(z)$.	$\forall r, \theta \in \mathbb{R}$ $\overline{(r e^{i\theta})} = r e^{-i\theta}$
Opposé	$\forall z \in \mathbb{C}$, $\lvert -z \rvert = \lvert z \rvert$	$\forall z \in \mathbb{C}^*$, $arg(-z) = arg(z) + \pi$.	$\forall r, \theta \in \mathbb{R}$ $-(r e^{i\theta}) = -r e^{i\theta} = r e^{i(\theta+\pi)}$
Somme	***Inégalité triangulaire*** $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $\lvert z + z' \rvert \leq \lvert z \rvert + \lvert z' \rvert$ (rien de mieux ! cessez de rêver et d'inventer des formules fausses.)	$\varnothing$ (rien du tout ! cessez de rêver et d'inventer des formules fausses...)	
Différence	*Pas de formule mais une interprétation en termes de <u>distance</u>*: $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\lvert b - a \rvert = AB$ où A et B sont les points d'affixes respectives a et b.	*Pas de formule mais une interprétation en termes d'<u>angles orientés</u>* : $\forall a, b \in \mathbb{C}$, avec $a \neq b$, $arg(b-a) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ où A et B sont les points d'affixes respectives a et b.	

<u>Sources</u> : Site Labomath, manuel Transmaths, manuel Repères, Manuel Hyperbole, manuel Math'x, manuel Odyssée, Manuel Déclic.

Table des matières

Le programme officiel

Nombres complexes

En classe terminale, les nombres complexes sont vus essentiellement comme constituant un nouvel ensemble de nombres avec ses opérations propres. Cette introduction s'inscrit dans la perspective d'un approfondissement lors d'une poursuite d'études.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Forme algébrique, conjugué. Somme, produit, quotient.	• Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes.	On introduit dans ce chapitre des éléments lui donnant une dimension historique.
Équation du second degré à coefficients réels.	• Résoudre dans **C** une équation du second degré à coefficients réels.	
Représentation géométrique.	• Représenter un nombre complexe par un point ou un vecteur.	Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
Affixe d'un point, d'un vecteur.	• Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur.	
Forme trigonométrique : - module et argument, interprétation géométrique dans un repère orthonormé direct ; - notation exponentielle.	• Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement. • Connaître et utiliser la relation $z\bar{z}=\lvert z\rvert^2$.	La notation exponentielle est introduite après avoir montré que la fonction $\theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$ vérifie la même relation fonctionnelle que la fonction exponentielle.
	• Effectuer des opérations sur les nombres complexes écrits sous différentes formes.	Les nombres complexes permettent de mémoriser les formules trigonométriques d'addition et de duplication vues en première. ⇆ [SI] Analyse fréquentielle d'un système.

<u>Notre progression</u> :

Partie I **Nombres complexes** 6h.

- position du problème
- forme algébrique d'un nombre complexe
- équation du second degré
- affixe d'un point, d'un vecteur

Partie II Forme trigonométrique, module, argument

$arg\,\frac{a-b}{c-d}$

Attention : Les transformations ne sont plus au programme.

♠ Exemple 7. $-14+89\,i \in \mathbb{C}$; $2+i\sqrt{3} \in \mathbb{C}$; $-5=-5+0\,i \in \mathbb{C}$; $\frac{4}{3}i=0+\frac{4}{3}i \in \mathbb{C}$.

Pourquoi i et pas $\sqrt{-1}$? On n'a pas gardé la notation $\sqrt{-1}$ car elle laisse penser que les règles habituelles sur les racine carrées sont applicables et on arrive à $-1=(\sqrt{-1})^2=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)^2}=1$. (Dans la réalité, il a fallu 150 ans pour abandonner cette notation et adopter la notation i proposée par Euler.)