Interrogation n°5: Produit scalaire (20 minutes)	1ère S 1

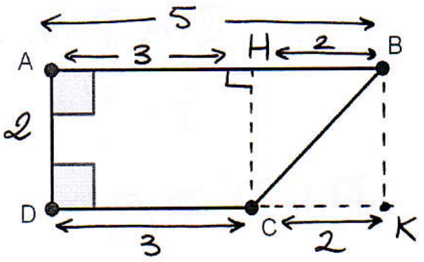
Mardi 30 mai 2012, **Calculatrices INTERDITES**.

Prénom : .... Nom (la première lettre suffit):	Note: $\frac{}{20}$

/8	Exercice 1

ABCD est un trapèze rectangle avec $AB=5$, $AD=2$ et $DC=3$ unités.

1) Calculer les produits scalaires suivants :



/1,5 **a)** $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CK} = -3\times 2 = \boxed{-6}$

où K est le projeté orthogonal de B sur (DC).

/1,5 **b)** $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DA}$ par projection sur (AD)

$= 2\times 2 = \boxed{4}$

/1,5 **c)** $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ car les vecteurs sont orthogonaux.

$\boxed{\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AB} = 0}$

/1,5 **d)** $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HB}$ par projection sur (AB)

$= -2\times 5 = -10$

$\boxed{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB} = -10}$

/2 **2)** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$. *On pourra utiliser la relation de Chasles.*

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KB})$

$= \underbrace{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CK}}_{-6} + \underbrace{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{KB}}_{0 \text{ car } \perp} + \underbrace{\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CK}}_{0 \text{ car } \perp} + \underbrace{\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{KB}}_{4} = -6+4 = -2$

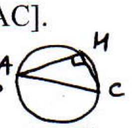
$\boxed{\text{OU}}$ $(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}).\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$ (calculés précedemment)

$= -6 + 4 = -2$

/7	Exercice 2

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points suivants définis par leurs coordonnées : $A(-1;3)$, $B(4;6)$ et $C(3;5)$.

/2 **3) a)** Déterminer au moyen du produit scalaire l'équation du cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre [AC].



$M\in\mathscr{C} \iff \overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{CM} \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM} = 0$

$\iff \begin{pmatrix}x+1\\y-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x-3\\y-5\end{pmatrix} = 0 \iff x^2+y^2-2x-8y-3+15=0$

$\iff \boxed{x^2+y^2-2x-8y+12=0 \text{ est l'équation de } \mathscr{C}.}$

/2 **b)** En déduire son centre et son rayon.

$x^2+y^2-2x-8y+12=0$

$\iff (x-1)^2-1+(y-4)^2-16+12=0$

$\iff (x-1)^2+(y-4)^2 = 5$

$(\mathscr{C})$ a pour centre $\Omega(1;4)$ et pour rayon $\sqrt{5}$.

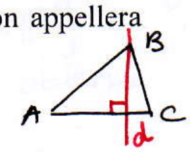
/3 **4)** Dans le triangle ABC, déterminer l'équation de la hauteur issue de B, que l'on appellera (d).

$M\in(d) \iff \overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix}x-4\\y-6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3+1\\5-3\end{pmatrix} = 0$

$\iff \begin{pmatrix}x-4\\y-6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = 0 \iff 4(x-4)+2(y-6) = 0$

$\iff 2(x-4)+y-6=0 \iff 2x+y-14=0$

(d) a pour équation $2x+y-14=0$ i.e $y=-2x+14$

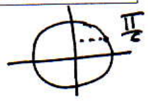


$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3+1\\5-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

/5	**Exercice 3.**

/1 **1)** Calculer $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$.

Rappel : Calculatrices INTERDITES.



$$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{12}+\frac{2\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$$

2) En déduire $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

/2

/2

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$
$$\boxed{\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

⚠ $\sqrt{6}-\sqrt{2}\neq\sqrt{4}$

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\boxed{\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

⚠ $\sqrt{6}+\sqrt{2}\neq\sqrt{8}$
Pas de simplification.

1 formule
1 valeur remarq
0,5 simplif

Commentaires au vu des copies

- Pour calculer un produit scalaire, on peut projeter un des deux vecteurs sur l'autre mais on ne peut projeter que sur ces deux directions.
- Rq Si on utilise un point non défini par l'énoncé, comme le projeté orthogonal de B sur (CD) dans l'exercice 1, il faut le définir.
- Equation de droites, de cercles :
  Si vous dites : $M\in\mathcal{C}\Rightarrow\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{CM}\Rightarrow\dots\Rightarrow x^2+y^2-2x-8y+12=0$
  il vous faut une réciproque.
  Pour n'avoir qu'une étape, on procède par équivalence :
  Soit M un point du plan. $M\in\mathcal{C}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{CM}\Leftrightarrow\dots\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-8y+12=0$
- Dans la formule $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$
  $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\neq(\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|)^2$. $\vec{u}-\vec{v}$ est le vecteur obtenu en mettant bout à bout $\vec{u}$ et $-\vec{v}$.