Produit Scalaire dans l'Espace — T.S.

I. Extension du produit scalaire à l'espace

A. Plusieurs définitions (équivalentes!) du Produit scalaire

Quand il n'y a que deux vecteurs, on se ramène à un plan : Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace on peut considérer deux représentants de même origine $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs du plan (ABC) et leur produit scalaire est donc celui de deux vecteurs d'un plan, déjà défini en première. Toutes les règles concernant les produit scalaire de deux vecteurs du plan s'appliquent donc dans l'espace.

Théorème et définition 1. *On a vu en Première quatre façons de calculer le produit scalaire de deux vecteurs. Elles sont encore valables dans l'espace; seule celle avec les coordonnées doit être modifiée :*

▪ **P 2.** ***Avec des normes uniquement*** : Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan ou de l'espace, on appelle ***produit scalaire*** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le **nombre réel** noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et défini par $\vec{u}\cdot\vec{v} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$.

▪ **P 3.** ***Avec le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs*** : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls du plan ou de l'espace *(non nuls pour que l'angle existe)* alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$.

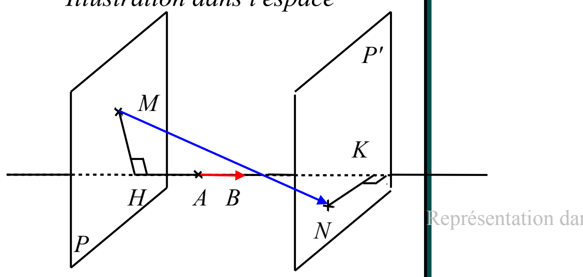
- *Pour définir l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ on choisit des représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même origine ce qui permet de se placer dans un plan.*
- *Le chapeau sur l'angle n'est pas indispensable, il est juste là pour que tout le monde réalise bien qu'il s'agit d'un angle.*
- *Que l'on mette l'ange orienté ou l'angle géométrique[1] dans la formule ne change rien car un angle orienté et son opposé ont le même cosinus.*

▪ **P 4.** ***Avec le projeté orthogonal*** : Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ deux vecteurs non nuls du plan ou de l'espace et soient H et K les projetés orthogonaux respectifs de M et N sur la droite (AB), alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HK}$.

Définition : Dans l'espace, le ***projeté orthogonal de M sur la droite (AB)*** est le point d'intersection de la droite (AB) et du plan perpendiculaire à (AB) passant par M.

Attention ! On peut projeter le premier vecteur sur le deuxième ou le deuxième vecteur sur le premier mais pas les deux vecteurs sur un troisième.

Illustration dans l'espace



J'ajoute ici un résultat que nous verrons plus loin de façon à avoir dans le même paragraphe toutes les façons de calculer le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace.

▪ ***Avec les coordonnées dans un repère orthonormé*** : On verra avec P10 que la formule $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'$ valable dans le plan se généralise à l'espace sous forme $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$.

B. Le produit scalaire permet de caractériser les vecteurs orthogonaux

Dans ce paragraphe, il n'y a que deux vecteurs, tout se passe donc dans un plan. Tous les résultats qui suivent sont donc déjà connus :
Comme on l'a déjà vu dans le plan, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ ou $(\vec{u},\vec{v})=\pm\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

Et voilà pourquoi on a la définition suivante :

Définition 5. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***orthogonaux*** si l'un des deux est nul ou si leurs directions sont orthogonales *(c'est à dire que les vecteurs sont portés par des droites orthogonales).*
« Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux » se note $\boldsymbol{\vec{u}\perp\vec{v}}$.

Caractérisation de l'orthogonalité 6. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

1 *Angle géométrique = angle du collège = angle non orienté.*

C. Expression du produit scalaire à l'aide des coordonnées dans un repère orthonormé

Définition 7. ***Carré scalaire d'un vecteur***: Si $\vec{u}$ est un vecteur du plan ou de l'espace, $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$. Ce nombre est appelé carré scalaire de $\vec{u}$ et est aussi noté $\vec{u}^{\,2}$.

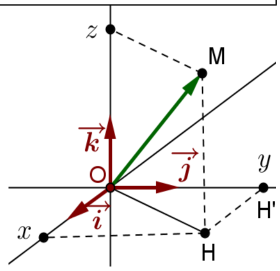
La notation peut être troublante: $\vec{u}^{\,2} \overset{\text{def}}{=} \vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$ est un scalaire (càd un nombre), pas un vecteur! Mais comme le produit scalaire se comporte comme le produit habituel (voir les règles de calcul ci-dessous), on a décidé de le noter avec les mêmes notations.

Formules utiles mais valables uniquement dans les repères orthonormés :

- **P 8.** Si $\vec{u}$ a pour coordonnées cartésiennes $\vec{u}(x,y,z)$ dans un repère **orthonormé**, alors sa norme est est donnée par la formule $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- **P 9.** Si les points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $(x_B\,;y_B\,;z_B)$ dans un repère **orthonormé**, alors la distance AB est donnée par la formule : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- **P 10.** Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées cartésiennes respectives $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ dans un repère **orthonormé**, alors $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'.}$

Démonstration de P8 :

On note M le point tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$. Les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ sont (x,y,z) et $\|\vec{u}\|^2=OM^2$. Soit $H(x,y,0)$ et $H'(0,y,0)$. Puisque le repère est orthonormé, le triangle OHH' est rectangle en H'. Par le théorème de Pythagore dans OHH', on a $OH^2=x^2+y^2$. En appliquant de nouveau le théorème de Pythagore dans le triangle OHM rectangle en H (de nouveau, rectangle car le repère est orthonormé), on a $\|\vec{u}\|^2=OM^2=OH^2+HM^2=x^2+y^2+z^2$.



Démonstration de P10: On utilise P. . . et P . . . .

Remarques:

- Ces résultats sont indépendants du repère orthonormé choisi. C'est fou, non? Si on change de repère orthonormé, x, x', y, y', z et z' changent mais par contre le nombre $xx'+yy'+zz'$ est toujours le même!
- Ces formules ne sont valables que si le repère est orthonormé (je sais, je l'ai déjà dit mais mieux vaut insister, c'est important).
- La formule P10 est très commode pour savoir si deux vecteurs dont on connaît les coordonnées dans un repère orthonormé sont orthogonaux. Elle peut donc servir à prouver qu'un angle est droit, que deux droites sont orthogonales, qu'une droite est orthogonale à un plan... etc.

D. Propriétés algébriques

Ce sont exactement les mêmes que dans le plan :

Propriété : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs du plan et λ un réel alors :

- **P 11.** Symétrie : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.
- **P 12.** Bilinéarité $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$ et $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

  Par symétrie, on a bien sûr $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$ et $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
- **P 13.** Identités remarquables : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs du plan ou de l'espace, on a :

  ◊ $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ ◊ $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ ◊ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

... et voilà pourquoi cette opération s'appelle produit scalaire:

- « Produit » car elle a des propriétés qui ressemblent à celles du produit de deux réels comme la distributivité par rapport à l'addition et les identités remarquables.
- «scalaire» car «scalaire» veut dire «nombre, par opposition à vecteur» et quand on calcule un produit scalaire on obtient bien un scalaire et pas un vecteur.

Démonstration : Toutes ces propriétés se passent en fait dans un plan sauf . . . . . .

C'est donc la seule qu'il nous faudra démontrer. La démonstration découle de P . . .

II. Applications du produit scalaire

En terminale, nous nous concentrerons sur les applications du produit scalaire à l'espace. N'oublions pas pour autant que de nombreuses applications du produit scalaire dans le plan ont été vues en Première. Pour l'application du produit scalaire au calcul du travail des forces en physique, aux équations de droites et de cercles, aux problèmes métriques comme la formules de la médiane ou la Formule d'Al-Kashi (= Théorème de Pythagore généralisé) voir le cours de 1S
http://mathematoques.weebly.com/uploads/1/2/0/3/12036729/ch11_produit_scalaire_cours_1hg_1ere_s_2011-12.pdf

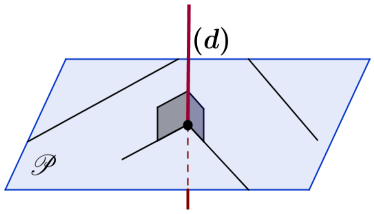
A. Rappel : Droite orthogonale à un plan

On fait ce retour en arrière car on a maintenant les outils pour faire la démonstration :

Théorème et définition 14. Si une droite (d) est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan $\mathscr{P}$ alors elle est orthogonale à toutes les droites de $\mathscr{P}$.

On dit alors que la droite (d) est ***orthogonale au plan*** $\mathscr{P}$.

▣ *Démonstration exigible au Bac.*

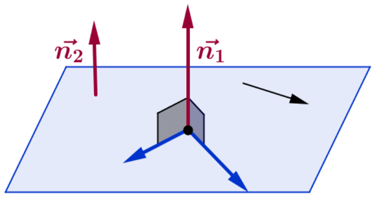


Remarque : L'adjectif "perpendiculaire" ne s'utilise que pour les droites orthogonales et sécantes (donc coplanaires). Par contre, on peut dire que des droites sont orthogonales qu'elles soient sécantes ou non.

B. Vecteur normal à un plan

Définition 15. On appelle vecteur ***normal*** à un plan tout vecteur non nul et orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.

Propriété 16. Un vecteur normal à un plan est orthogonal à tout vecteur de ce plan.



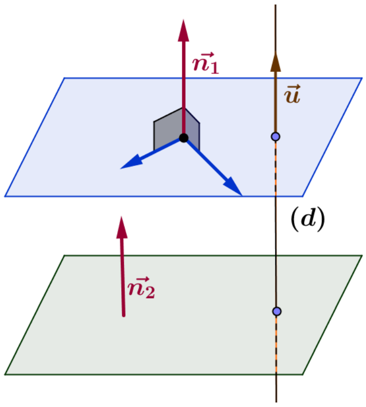
Propriété 17. Tous les vecteurs normaux à un plan sont colinéaires entre eux.

Propriété 18. Une droite est orthogonale à un plan ssi un vecteur directeur de la droite est colinéaire à un vecteur normal au plan.

Illustration : Sur la figure, $\vec{u}$ et $\vec{n}_1$ sont colinéaires.

Propriété 19. Deux plans sont parallèles ssi un vecteur normal de l'un est colinéaire à un vecteur normal de l'autre.

Illustration : Sur la figure, $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires.



C. Équations de plan

Propriété 20. Un plan est caractérisé par la donnée d'un point et d'un vecteur normal

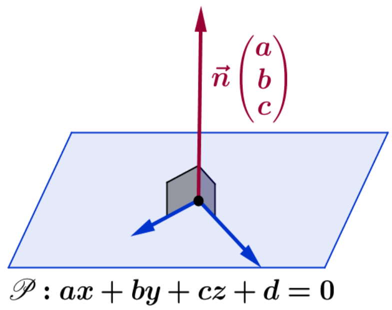
Le plan $\mathscr{P}$ qui passe par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Autrement dit, $M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Cette caractérisation est très utile en pratique pour trouver l'équation d'un plan lorsque l'espace est muni d'un repère orthonormé.

Propriété 21. ◙ *Démonstration exigible au Bac.*

Soient a, b et c trois réels qui ne sont pas tous les trois nuls et d un réel quelconque. L'espace est muni d'un repère orthonormé.



▪ Dans l'espace[2], tout plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$.

▪ Réciproquement, dans l'espace toute équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec a, b et c non tous nuls est celle d'un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

D. Utilisation du produit scalaire pour montrer que des plans sont perpendiculaires

Rappel : Par définition, deux plans sont ***perpendiculaires*** ssi l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

Propriété 22. Deux plans sont perpendiculaires ssi un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre

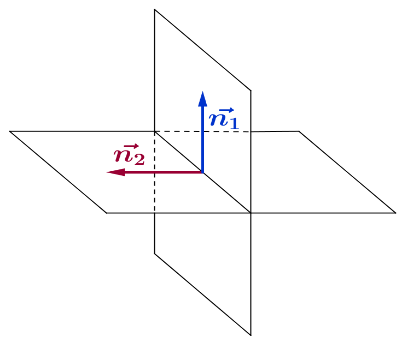


Table des matières

Les ROC du chapitre (Dans la liste des exigibles au bac, comme l'indique le symbole ◙ dans le B.O.)

◙ Caractériser les points d'un plan par une relation $ax+by+cz+d=0$ avec a, b et c non tous nuls.

◙ Démontrer qu'une droite est orthogonale à toute droite d'un plan ssi elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Sources : Mon cours de 1S, le cours de Pierre Lux, le manuel Math'x.

2 *Attention ! Dans l'espace* $ax+by+c=0$ *est l'équation d'un plan (dont un vecteur normal a pour coordonnées (a, b, 0)) et non celle d'une droite. Dans le plan* $ax+by+c=0$ *est par contre bien une équation de droite.*

Le programme officiel

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Produit scalaire Produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace : définition, propriétés. Vecteur normal à un plan. Équation cartésienne d'un plan.	• Déterminer si un vecteur est normal à un plan. ▣ Caractériser les points d'un plan de l'espace par une relation $ax+by+cz+d=0$ avec a, b, c trois nombres réels non tous nuls. • Déterminer une équation cartésienne d'un plan connaissant un point et un vecteur normal. • Déterminer un vecteur normal à un plan défini par une équation cartésienne. ▣ Démontrer qu'une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. • Choisir la forme la plus adaptée entre équation cartésienne et représentation paramétrique pour : - déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan ; - étudier la position relative de deux plans.	On étend aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire donnée dans le plan. On caractérise vectoriellement l'orthogonalité de deux droites et on introduit la notion de plans perpendiculaires. AP *Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires.* *Intersection de trois plans.*