Préparation Du D.S. sur les fonctions carré et inverse

■ Le cours.

Faites une restitution pour voir si vous savez retrouver les principales définitions et propriétés. Sinon, relisez-les (en réfléchissant au sens de ce que vous lisez!) et recommencez jusqu'à obtenir une restitution de qualité.

■ Les exercices.

₪ Les différents niveaux de compétences sur un exercice :

Le niveau...	correspond à ...	et le jour J...
Niveau 0	Je ne comprends pas l'exercice lorsque quelqu'un le fait devant moi (en classe au tableau par exemple) ou me l'explique.	Vous ne saurez pas faire un exercice semblable le jour du contrôle. Il faut agir avant !
Niveau 1	Je comprends l'exercice si quelqu'un le fait devant moi mais je ne sais pas le faire seul, même avec un peu d'aide.	
Niveau 2	Je suis capable de refaire l'exercice seul à condition d'avoir de l'aide (mes notes, le livre, l'enseignant, un camarade).	
Niveau 3	Je suis capable de refaire l'exercice seul sans aucune aide.	Vous serez capable de refaire cet exercice le jour du contrôle.
Niveau 4	Je suis capable de refaire l'exercice seul sans aucune aide et de transposer la méthode à un exercice similaire mais différent[1].	Bravo ! Vous êtes prêt(e) pour le contrôle !

₪ Liste des exercices de préparation du contrôle :

- Tous les exercices faits en classe ; Tous les exercices faits à la maison au titre de l'entraînement quotidien ; Tous les exercices de la petite interrogation s'il y en a eu une;
- Tous les exercices résolus du livre ou corrigés à la fin (dont les QCM);
- Tous les exercices au dos de cette feuille;

Travaillez si possible tous les exercices jusqu'à atteindre le niveau 4 pour chacun : Vous êtes alors prêt(e) pour le contrôle !

₪ En pratique.

En pratique, réviser consiste à faire des restitutions de façon à avoir besoin de moins en moins d'aide. Lorsque vous n'avez plus besoin d'aide du tout, vous en êtes au niveau 3.

Pour passer du niveau 0 au niveau 1, reprenez l'exercice ligne par ligne, avec le cours ouvert devant vous et à chaque étape, trouvez quelle est la propriété employée ou la donnée de l'énoncé utilisée. Vous aurez peut-être besoin de reprendre des notions des chapitres ou des classes précédentes.

Pour passer du niveau 1 au niveau 3, faites des restitutions. Notez dans la marge le niveau atteint pour chaque exercice pour savoir où vous en êtes, savoir ce qui vous reste à faire et vous voir progresser. Par exemple, après voir fait un exercice en classe, vous écrivez N1 dans la marge. Vous le reprenez chez vous et vous y arrivez sans aucune aide : Vous barrez alors le N1 et vous écrivez N3. Deux jours plus tard, vous faites un autre exercice et vous remarquez (tout seul!) qu'il fonctionne selon le même principe que l'exercice précédent : Vous barrez alors le N3 et vous écrivez N4 (ou « N4. Victoire ! »).

Pour passer du niveau 3 au niveau 4, faites beaucoup d'exercices, vous finirez par remarquer que certaines structures sous-jacentes reviennent d'exercice en exercice.

Atteindre le niveau 4 demande de l'entraînement, c'est à dire uniquement du travail[2]. Bref, cela ne dépend que de vous !

---

[1] Exemple : Pour résoudre les exercices « *Un menuisier doit passer deux couches de vernis sur vingt tables rectangulaires identiques de dimensions 50 cm sur 70 cm. Un pot de vernis permet de couvrir une surface de 10 m². De combien de pots de vernis le menuisier a-t-il besoin?* » et « *Un peintre doit passer trois couches de peinture sur 3 murs rectangulaires identiques de dimensions 4,33 m sur 2,40 cm. Avec un pot de peinture, on peut couvrir une surface de 15 m². De combien de pots de peinture le peintre a-t-il besoin?* », on utilise la même méthode. Le remarquer, c'est savoir *transposer* et donc en être au niveau 4.

[2] La quantité de travail à fournir dépend de vos connaissances actuelles. Si vous avez du retard, il vous faudra initialement travailler plus que ceux qui n'ont pas de lacunes.

Exercices d'entraînement au D.S.

☐ Exercice 1. Donner le meilleur encadrement possible de $\frac{1}{x}$ et de x^2 dans les cas suivants :

a) $3 < x < 5$ b) $x \in [-7\,;-5[$ c) $\frac{2}{3} \geqslant x \geqslant \frac{1}{2}$ d) $x \in \left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$

☐ Exercice 2. Manipulation réfléchie d'inégalités

1) Donner le meilleur encadrement possible de $f(x)=\frac{-4}{x^2+5}$ sur $]-3;-1]$. *Justifier le passage d'une inégalité à l'autre.*

2) Même question avec $f(x)=\frac{-4}{x^2}+5$ sur $[-4;-2[$.

3) Même question avec $f(x)=\frac{-4}{(x-5)^2}$ sur $[-3;-1[$.

☐ Exercice 3. Une entreprise produit des téléphones portables en grande quantité. Le coût de production total, pour une production inférieure à 10 000 unités, comporte un coût fixe de 3 000 € et un coût variable de 15 € par unité.

1) On note $C(x)$ le coût total de production pour x unités. Donner l'expression de $C(x)$.

2) Lorsque l'entreprise fabrique x téléphones, le coût moyen de production de chaque unité est $f(x)=\frac{C(x)}{x}$. Vérifier que $f(x)=15+\frac{3000}{x}$.

3) Chaque téléphone produit est vendu 25 €.

a) Afficher sur l'écran de la calculatrice la courbe représentative de f sur $]0;10\,000]$. Déterminer graphiquement une estimation de la quantité à partir de laquelle la production est rentable pour l'entreprise.

b) Par le calcul, trouver la quantité exacte.

☐ Exercice 4. Soient f et g les fonctions définies par $f(x)=-(x+2)^2-3$ et $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

1) Déterminer le tableau de variations de f et le tableau de signes de f.

2) En déduire le domaine de définition de g puis ses variations.

☐ Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x$.

1) Tracer dans le même repère les courbes représentatives de la fonction inverse et de la fonction f.

2) Comparer graphiquement un réel non nul et son inverse.

3) Retrouver ce résultat pas le calcul.

☐ Exercice 6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-3x^4$.

1) Visualisez la courbe de cette fonction sur votre calculatrice et conjecturer ses variations. (« *f est croissante sur ... et décroissante sur ....*)

2) Par des manipulations d'inégalités, démontrer vos conjectures puis dresser le tableau de variations de f.

3) Donner le meilleur encadrement possible de $f(x)$ lorsque $x \in [-3\sqrt{2};-\sqrt{2}]$.

4) Donner le meilleur encadrement possible de $f(x)$ lorsque $x \in [-3\sqrt{2};\sqrt{2}]$.

5) Déterminer l'abscisse des points d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.

☐ Exercice 7. Écrire un algorithme qui demande à utilisateur d'entrer un réel non nul x et qui affiche le plus grand des deux nombres x^2 et $\frac{1}{x}$.

☐ Exercice 8. Encadrer le volume d'un cylindre

Le volume d'un cylindre de hauteur h et de base un cercle de rayon r est $V=\pi r^2 h$.

Dans chacun des cas suivants, donner le meilleur encadrement possible de V :

1) $h=3\,m$ et $2{,}3\,m \leqslant r \leqslant 2{,}4\,m$ **2)** $h=\frac{7}{3}cm$ et $\frac{6}{5}cm \leqslant r \leqslant \frac{3}{2}cm$ **3)** $h=3\,dm$ et $2{,}3\,cm \leqslant r \leqslant 2{,}4\,cm$

☐ Exercice 9. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+2)^2$.

1) Déterminer le tableau de variations de f.

2) En déduire que f admet un minimum. En quelle valeur ce minimum est-il atteint et combien vaut-il ?

3) Donner le meilleur encadrement possible de f dans les cas suivants :

a) $x\in[-1\ ;3]$ b) $x\in[-4\ ;-1[$ c) $x\in]-2\ ;0]$

4) Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x)>12$. (Vérifiez que ces résultats sont cohérents avec les variations de f !)

☐ Exercice 10. Même exercice avec $g(x)=-4(x+6)^2+15$ puis $h(x)=-\frac{2}{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$.

☐ Exercice 11. Vrai ou faux ?

x désigne un nombre réel. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (Justifier !)

1) Si $x\geqslant 4$ alors $x^2\geqslant 16$. **2)** Si $x\leqslant 2$ alors $x^2\leqslant 4$. **3)** Si $x\leqslant -1$ alors $x^2\leqslant 1$.

4) Si $-5\leqslant x\leqslant -2$ alors $0\leqslant x^2\leqslant 30$. **5)** Si $-1\leqslant x\leqslant 2$ alors $1\leqslant x^2\leqslant 4$. **6)** Si $x^2\leqslant 4$ alors $x\leqslant 2$.

☐ Exercice 12. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2+2$ et $g(x)=13x-13$.

1) Développer $(2x-3)(x-5)$.

2) a) Déterminer le tableau de variations de f.

b) Déterminer le tableau de variations de g.

3) a) Tracer sur votre copie les courbes représentatives de f et g sur le même graphique.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)>g(x)$.

c) Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x)>g(x)$.

☐ Exercice 13. On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{x-2}$.

1) Déterminer son domaine de définition.

2) Visualisez la courbe représentative de cette fonction sur votre calculatrice et conjecturer ses variations.

3) Démontrer les conjectures faites.

☐ Exercice 14. Même exercice avec $g(x)=\frac{1}{6-3x}$ puis $h(x)=\frac{1}{4-3x}$ puis $k(x)=-\frac{5}{4-3x}$.

☐ Exercice 15. Le <u>périmètre</u> d'un carré est compris entre 16 cm et 18 cm. En déduire un encadrement de son aire.

☐ Exercice 16. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante et dont la courbe représentative coupe l'axe des abscisses au point $A(3;0)$. (*Il existe une infinité de fonctions f vérifiant ces conditions donc il est impossible de trouver une formule explicite pour f*.) Soit g la fonction définie par $g(x)=(f(x))^2$.

1) Déterminer le tableau de variations de f et le tableau de signes de f.

2) Déterminer les variations de g et donner son tableau de variations.

☐ Exercice 17. Vrai ou faux ? (réciproque et contraposée d'une proposition)

a et b sont des nombres réels. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (*Justifier !*)

1) Si $a=b$ alors $a^2=b^2$. **2)** Si $a^2=b^2$ alors $a=b$. **3)** Si $a^2\neq b^2$ alors $a\neq b$.

4) Si $a=b$ alors $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$. **5)** Si $\frac{1}{a}\neq\frac{1}{b}$. alors $a\neq b$. **6)** Si $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$ alors $a=b$.

☐ Exercice 18. Un nombre réel positif augmente de 25 %. Comment varie son inverse ?

☐ Exercice 19.

1) a) Écrire un algorithme qui demande à utilisateur d'entrer deux réels non nuls x et y et qui affiche le plus grand des deux nombres $a=(x+y)^2$ et $b=x^2+y^2$.

b) *Compléter par « a »ou « b »* : (1) si $x=2$ et $y=3$, alors l'algorithme affiche ….. (2) si $x=-2$ et $y=-3$, alors l'algorithme affiche ….. (2) si $x=-2$ et $y=3$, alors l'algorithme affiche …..

2) Développer $a-b$ et en déduire la règle de comparaison de a et b.