Fonctions de référence

Polynômes du second degré et fonctions homographiques

2nde

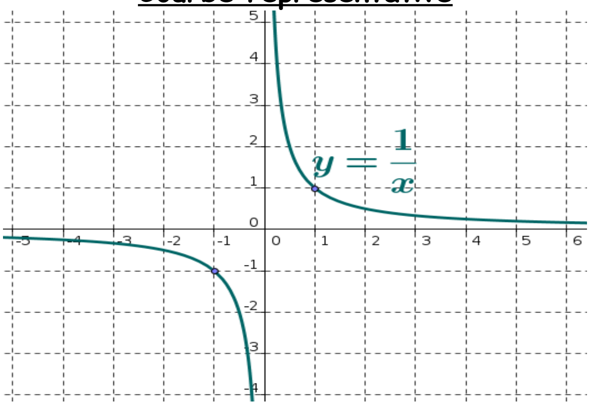
Table des matières

I. Fonctions homographiques

A. La star de la famille : La fonction inverse (Normalement vous connaissez déjà par cœur ce paragraphe)

Définition 1. La fonction ***inverse*** est définie sur $]-\infty;\ 0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Courbe représentative



Variations

▪ **Tableau de variations**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	↘	‖	↘

▪ La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ (*mais* *pas* *sur* $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.)

Les variations de la fonction inverse permettent de déduire les règles suivantes :

Règle de manipulation des inégalités 2.

▪ Si $a>0$ et $b>0$ avec $a<b$ alors $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ car $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$.

▪ Si $a<0$ et $b<0$ avec $a<b$ alors $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ car $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty;0[$.

▪ Mais si a et b n'ont pas le même signe, par exemple, si $a<0$ et $b>0$ alors on a $a<b$ et $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$ (inégalités restant dans le même sens).

Résumé : « ***La fonction inverse retourne les inégalités à condition que les deux membres aient le même signe*** ».

B. Fonctions homographiques : Cas général

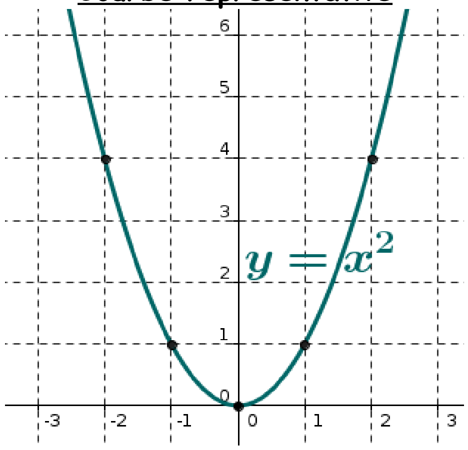
Définition 3. Une fonction qui peut s'écrire $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c et d sont des nombres avec $c\neq 0$ s'appelle une fonction ***homographique***.
Une telle fonction est toujours définie sur $\mathbb{R}$ privé de la valeur interdite, qui est celle qui annule le dénominateur.

II. Polynômes du second degré

A. La star de la famille : La fonction carré (Normalement vous connaissez déjà par cœur ce paragraphe)

Définition 4. La fonction ***carré*** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.

Courbe représentative



Variations

▪ **Tableau de variations**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)=x^2$	↘	0	↗

▪ La fonction carré est
- strictement décroissante sur $]-\infty;0]$
- et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Les variations de la fonction carré permettent de déduire les règles suivantes :

Règle de manipulation des inégalités 5.
- Si $a>0$ et $b>0$ avec $a<b$ alors $a^2<b^2$ car $x\mapsto x^2$ est croissante sur $[0;+\infty[$.
- Si $a<0$ et $b<0$ avec $a<b$ alors $a^2>b^2$ car $x\mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty;0]$.
- Mais si a et b n'ont pas le même signe, par exemple, si $a<0$ et $b>0$ alors on a $a<b$ et mais on ne sait pas dans quel ordre vont être rangés a^2 et b^2 .

B. Définition et différentes écritures d'un polynôme du second degré

Définition 6. Une fonction qui peut s'écrire $f(x)=ax^2+bx+c$ où a , b et c sont des nombres avec $a\neq 0$ s'appelle une fonction ***trinôme du second degré*** ou un ***polynôme du second degré***. Une telle fonction est toujours définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Remarques :
1) Un *tri*nôme du second degré est formé de trois termes d'où son nom (*tri* =*3*).
2) On dit aussi que f est un ***polynôme du second degré***, ou un ***polynôme de degré 2***.
3) La fonction carré est un polynôme du seconde degré (prendre $a=1, b=0$ et $c=0$)

[P 7] Différentes écritures d'un polynôme du second degré.
Une fonction trinôme peut toujours s'écrire au moins de deux façons différentes et parfois trois :
- La forme $f(x)=ax^2+bx+c$ est appelée la ***forme développée***.
- La forme $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ est appelée la ***forme canonique***.
- Il est parfois possible (mais pas toujours) de donner une ***forme factorisée*** $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, x_1 et x_2 étant des nombres qui dépendent de la fonction.

♠ Exemple 1. $f: x\mapsto -2x^2-12x+32$ est un polynôme du second degré. Ses trois écritures sont :

$f(x)=-2x^2-12x+32$	$f(x)=-2(x+3)^2+50$	$f(x)=-2(x+8)(x-2)$
forme développée	*forme canonique*	*forme factorisée*

C. Représentation graphique et variations d'un polynôme du second degré

Propriétés 8.

- La courbe représentative d'une fonction du type $f(x)=ax^2+bx+c$ (avec $a\neq 0$) est une ***parabole***.
- Cette parabole est **tournée vers le haut** si $a>0$ et elle est tournée vers le bas si $a<0$.
- Son **sommet** a pour abscisse $x_S=-\dfrac{b}{2a}$.
- Elle admet pour **axe de symétrie** la droite verticale qui passe par le sommet de la parabole. Cette droite a pour équation $x=-\dfrac{b}{2a}$.

Exercice 2. Complétez

Premier cas :

Tableau de variations :

x	
f	

Illustration : Représentation graphique

Deuxième cas :

Tableau de variations :

x	
f	

Illustration : Représentation graphique

Les mots pour le dire :

Propriétés 9. Variations d'un trinôme du second degré :

Une fonction du type $f(x)=ax^2+bx+c$ (avec $a\neq 0$) est

- décroissante puis croissante si $a>0$ (parabole tournée vers le haut)
- et elle est croissante puis décroissante si $a<0$. (parabole tournée vers le bas)

Objectifs du chapitre : Vous devez ....

- ☐ Savoir reconnaître un polynôme de degré 2.
- ☐ Connaître les variations d'une fonction polynôme de degré 2 selon le signe du coefficient de x^2 et savoir dresser son tableau de variations.
- ☐ Savoir déterminer l'extremum d'une fonction polynôme de degré 2 (maximum ou minimum selon le signe du coefficient de x^2).
- ☐ Savoir que la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole.
- ☐ Savoir déterminer les coordonnées du sommet de cette parabole ainsi que son axe de symétrie.

- ☐ Savoir reconnaître une fonction homographique.
- ☐ Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction homographique.

Et on retrouve des objectifs des chapitres ou des années précédentes :

- ☐ Connaître les définitions des fonctions croissantes et décroissantes et savoir les utiliser pour prouver qu'une fonction est croissante ou décroissante.
- ☐ Connaître les définitions des fonctions croissantes et décroissantes et, dans le cas où les variations de la fonction sont connues, savoir les utiliser pour manipuler des inégalités.

- ☐ Savoir représenter les fonctions carré et inverse (être capable de tracer leurs courbes représentatives en quelque secondes à tout instant).
- ☐ Connaître les variations de la fonction carré et les règles de manipulation d'inégalités qui en découlent.
- ☐ Connaître les variations de la fonction inverse et les règles de manipulation d'inégalités qui en découlent.

- ☐ savoir développer et factoriser une expression (facteur commun, identités remarquables).
- ☐ savoir identifier la forme la plus adaptée (développée, factorisée) d'une expression en vue de la résolution d'un problème.
- ☐ savoir déterminer le signe d'une expression en utilisant si nécessaire un tableau de signes.

Objectifs en termes de TICE (rien de nouveau)

- ☐ savoir obtenir un tableau de valeurs d'une fonction à la calculatrice.
- ☐ savoir tracer la courbe représentative d'une fonction à la calculatrice.
- ☐ savoir utiliser la fonction « Trace » de la calculatrice pour déterminer une valeur approchée des coordonnées d'un point de la courbe.

♠ Exercice 1.

Soit f la fonction définie par $f(x)=(x+1)^2-4$ [c'est la forme canonique].

1) a) Développer $f(x)$ [On obtient la forme développée].

b) Factoriser $f(x)$. [On obtient la forme factorisée].

2) Résoudre $f(x)=0$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

3) Calculer $f(0)$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

4) Résoudre $f(x)=12$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

5) Résoudre $f(x)=-3$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

6) Calculer $f(-1)$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

7) La fonction f admet-elle un maximum ou un minimum ? Si oui, lequel ?

8) Tracer la courbe représentative de f sur votre calculatrice et expliquer comment utiliser ce graphique pour vérifier vos réponses aux trois questions précédentes.

♠ Exercice 1.

Soit f la fonction définie par $f(x)=(x+1)^2-4$ [c'est la forme canonique].

1) a) Développer $f(x)$ [On obtient la forme développée].

b) Factoriser $f(x)$. [On obtient la forme factorisée].

2) Résoudre $f(x)=0$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

3) Calculer $f(0)$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

4) Résoudre $f(x)=12$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

5) Résoudre $f(x)=-3$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

6) Calculer $f(-1)$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

7) La fonction f admet-elle un maximum ou un minimum ? Si oui, lequel ?

8) Tracer la courbe représentative de f sur votre calculatrice et expliquer comment utiliser ce graphique pour vérifier vos réponses aux trois questions précédentes.

♠ Exercice 1.

Soit f la fonction définie par $f(x)=(x+1)^2-4$ [c'est la forme canonique].

1) a) Développer $f(x)$ [On obtient la forme développée].

b) Factoriser $f(x)$. [On obtient la forme factorisée].

2) Résoudre $f(x)=0$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

3) Calculer $f(0)$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

4) Résoudre $f(x)=12$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

5) Résoudre $f(x)=-3$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

6) Calculer $f(-1)$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

7) La fonction f admet-elle un maximum ou un minimum ? Si oui, lequel ?

8) Tracer la courbe représentative de f sur votre calculatrice et expliquer comment utiliser ce graphique pour vérifier vos réponses aux trois questions précédentes.

♠ Exercice 1.

Soit f la fonction définie par $f(x)=(x+1)^2-4$ [c'est la forme canonique].

1) a) Développer $f(x)$ [On obtient la forme développée].

b) Factoriser $f(x)$. [On obtient la forme factorisée].

2) Résoudre $f(x)=0$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

3) Calculer $f(0)$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

4) Résoudre $f(x)=12$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

5) Résoudre $f(x)=-3$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

6) Calculer $f(-1)$. [Pensez à choisir la forme de $f(x)$ la plus adaptée !]

7) La fonction f admet-elle un maximum ou un minimum ? Si oui, lequel ?

8) Tracer la courbe représentative de f sur votre calculatrice et expliquer comment utiliser ce graphique pour vérifier vos réponses aux trois questions précédentes.

BO

Fonctions de référence Fonctions linéaires et fonctions affines	• Donner le sens de variation d'une fonction affine. • Donner le tableau de signes de $ax+b$ pour des valeurs numériques données de a et b.	On fait le lien entre le signe de $ax+b$, le sens de variation de la fonction et sa courbe représentative.
Variations de la fonction carré, de la fonction inverse.	• Connaître les variations des fonctions carré et inverse. • Représenter graphiquement les fonctions carré et inverse.	Exemples de non-linéarité. En particulier, faire remarquer que les fonctions carré et inverse ne sont pas linéaires.
Études de fonctions Fonctions polynômes de degré 2.	• Connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes.	Les résultats concernant les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes sont donnés en classe et connus des élèves, mais peuvent être partiellement ou totalement admis. Savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2 n'est pas un attendu du programme.
Fonctions homographiques.	• Identifier l'ensemble de définition d'une fonction homographique.	Hormis le cas de la fonction inverse, la connaissance générale des variations d'une fonction homographique et sa mise sous forme réduite ne sont pas des attendus du programme.