Nom : . . . .   Prénom : . . . .

T.P. TICE avec Geogebra

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale
Le théorème de Moivre-Laplace

T.S.

Partie I. Une situation simple mais qui aboutit à un calcul impossible sans approximation

On lance n fois une pièce équilibrée et on compte le nombre de fois où on a obtenu « Pile ». On appelle X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on a obtenu « Pile » sur n lancers.

1) Quelle est la loi de X_n ? Exprimer son espérance et son écart écart-type en fonction de Z_n

. . . .
. . . .
. . . .

Compléter : $\mu_n \stackrel{\text{def}}{=} E(X_n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\sigma_n \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(X_n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2) Prouver que pour tout entier k avec $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $P(X_n = k) = \binom{n}{k} 0{,}5^n$.

. . . .

3) Dans le cas particulier où $n = 10^4$, on souhaite calculer la probabilité d'obtenir « Pile » entre 4950 fois et 5100 fois càd $P(4950 \leq X_{10^4} \leq 5100)$.

Compléter : $P(4\,950 \leqslant X_{10^4} \leqslant 5\,100) = \sum_{k=\ldots\ldots}^{\ldots\ldots} \binom{\ldots\ldots\ldots}{k} (\ldots\ldots)^{10000}$ puis, avec une calculatrice, essayer de calculer cette somme et à défaut le premier terme de cette somme. Que constatez-vous ?

. . . .

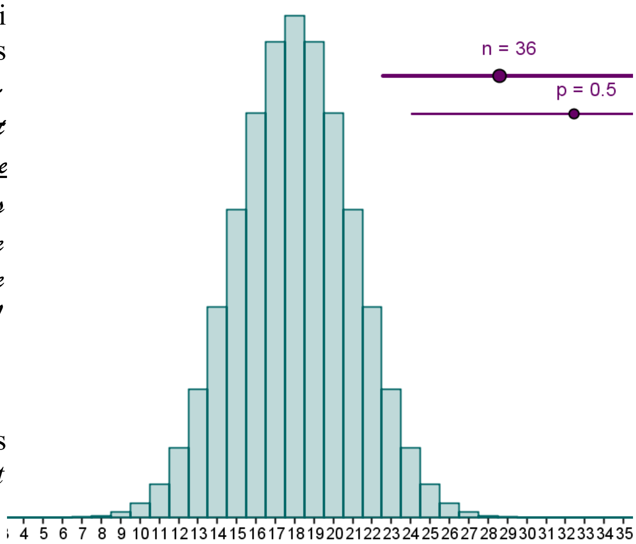
Partie II. Observons et trouvons une idée pour approximer la probabilité souhaitée.

Il est difficile de voir quoi que ce soit sur une figure où $n = 10\,000$. On va donc commencer par observer ce qui se passe pour des valeurs de n plus petites. Ceci permettra aussi de se placer dans un cas où le calcul direct de la probabilité cherchée par la loi binomiale est possible et nous en profiterons pour vérifier notre approximation. Un peu confortés par cette vérification, nous appliquerons alors cette méthode au calcul de $P(4\,950 \leqslant X_{10^4} \leqslant 5\,100)$.

4) Commençons par un cas simple et observable : On suppose dans cette question qu'on lance 36 fois notre pièce équilibrée ($n = 36$) et qu'on veut calculer la probabilité d'obtenir entre 17 et 22 succès. Autrement dit, on veut calculer $P(17 \leqslant X_{36} \leqslant 22)$.

Ouvrir le document Geogebra <u>*TD Moivre-Laplace **1***</u>. Sur ce document figurent les représentations de la loi de X_n sous forme de diagramme en bâtons et sous forme d'histogramme. *(Non, ce n'est pas la même chose : Dans un diagramme en bâtons, c'est la <u>hauteur</u> du bâton qui est égale à $P(X_n = k)$ alors que dans un histogramme c'est <u>l'aire</u> du rectangle qui est égale à $P(X_n = k)$. D'ailleurs vous voyez dans la colonne algèbre (colonne de gauche de Geogebra) que l'aire du digramme en bâtons vaut 0 (forcément !) alors que celle de l'histogramme, qui est la somme de airs des rectangles vaut 1 (forcément aussi !).)*

Histogramme de X_{36}



a) Sur la figure ci-contre, coloriez $P(17 \leqslant X_{36} \leqslant 22)$.

b) Faites varier n et p jusqu'à ce que les courbes obtenues vous inspirent un « *Bon sang, mais c'est bien sûr !* » **Ne le dites pas à haute voix ! Écrivez-le :**

Cela ressemble à . . . .

Faites afficher sur le même diagramme une courbe qui vous conforte dans votre intuition.

Vérification par le correcteur : ☐ La bonne courbe est là !

c) <u>Application de l'approximation</u> : ▪ $P(17 \leqslant X_{36} \leqslant 22) \approx P(\ldots\ldots\ldots \leqslant Y \leqslant \ldots\ldots\ldots)$ où Y suit la loi . . . .
. . . .

Si vous avez des « virgules 5 » dans vos bornes, bravo, vous avez effectué spontanément la « correction de continuité » ! sinon, regardez mieux le premier et le dernier rectangle.

▪ Grâce à la calculatrice ou Geogebra (*Taper « Intégrale » dans la barre de saisie du bas et Geogebra vous indiquera la syntaxe à utiliser*) et compléter la première ligne tableau ci-dessous.

	calcul direct avec la loi binomiale (donc sans approximation)	*En approximant par une loi normale, <u>avec</u> correction de continuité*	*En approximant par une loi normale, <u>sans</u> correction de continuité*
$P(17 \leqslant X_{36} \leqslant 22)$			
$P(4\,950 \leqslant X_{10^4} \leqslant 5\,100)$			

▪ Que pensez-vous de votre approximation ? . . . .

5) Revenons à notre question initiale : Utiliser une méthode semblable à celle de la question précédente pour calculer $P(4\,950 \leqslant X_{10^4} \leqslant 5\,100)$ ***(Rappelons qu'on n'avait pas réussi par le calcul direct (voir Partie I), c'est donc une réelle avancée!)*** et compléter la deuxième ligne tableau ci-dessous.

<u>Partie III</u>. <u>Le théorème de Moivre-Laplace</u> : Même idée mais après avoir centré et réduit, ce qui permet de se ramener toujours à la même loi et d'avoir une idée intuitive du résultat car on compte en nombres d'écart-types par rapport à la moyenne

Ouvrir le document Geogebra <u>*TD Moivre-Laplace 2*</u>. Sur ce document figure de nouveau l'histogramme de X_n mais par rapport au document précédent, on a rajouté l'histogramme de la variable aléatoire Z_n obtenue en centrant et réduisant X_n (*c'est l'histogramme de gauche, le plus haut des deux*). Faire varier *n* et *p* puis répondre aux questions suivantes :

6) La forme et la position de l'histogramme de X_n changent-ils beaucoup quand *n* et *p* varient ? . . . . .

7) La forme et la position de l'histogramme de Z_n changent-ils beaucoup quand *n* et *p* varient ? . . . . .

8) Ajouter sur la figure une courbe (indépendante de *n* et *p*) qui permet d'approximer l'histogramme de Z_n quelque soient *n* et *p*. Vérification par le correcteur : ☐ La bonne courbe est là !

9) Traduire la condition $17 \leqslant X_{36} \leqslant 22$ par une condition sur Z_{36} .

. . . .

. . . .

10) Ouvrir le document Geogebra <u>*TD Moivre-Laplace 3*</u> sur lequel on n'a gardé que Z_n (ce qui permet de changer d'échelle pour y voir mieux) et utiliser l'approximation de la question 8 pour trouver une valeur approchée de $P(17 \leqslant X_{36} \leqslant 22)$. *Taper « Intégrale » dans la barre de saisie du bas et Geogebra vous indiquera la syntaxe à utiliser.*

11) <u>Cas général</u> : **<u>Le théorème de Moivre-Laplace</u>**. *Compléter* : Soit *n* un entier naturel non nul et p un réel dans $]0;1[$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires où X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.

Pour tous réels *a* et *b*, $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(a \leq \dfrac{X_n - ....}{..........} \leq b\right) = P(.... \leq Z \leq ....) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ où Z suit la loi . . . .

<u>Partie IV</u>. Utiliser Moivre-Laplace pour faire l'exercice suivant : [Source M. Mugnier]

Monsieur Wazzedine achète ses pistaches Crunchos chez *Haut Là Bas* et il en mange un paquet tous les soirs. Toutefois, une pistache sur cinq refuse de s'ouvrir rapidement et du coup, monsieur Wazzedine ne la mange pas. Monsieur Wazzedine ouvre un paquet de 400 pistaches; on veut connaître la probabilité qu'il en mange entre 312 et 336.

1) Quelle est la variable aléatoire centrée réduite associée à Y la variable aléatoire correspondant au nombre de pistaches mangée par M. Wazzedine. Appliquer alors «*la méthode de Moivre-Laplace*» pour calculer la probabilité recherchée.

2) Faire de même pour calculer *sans calculatrice* $P(306 \leq Y \leq 336)$ puis $P(312 \leq Y \leq 328)$.

3) Faire de même en utilisant cette fois la calculatrice pour $P(Y \leq 300)$.