

## Introduction :

En seconde et en première, nous avons interprété  $\cos$  et  $\sin$  comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point du cercle trigonométrique et nous avons utilisé le cercle trigonométrique pour résoudre des équations.

En terminale, on va traiter  $\sin$  et  $\cos$  comme des fonctions et, comme pour n'importe quelle fonction, on va s'intéresser à leurs courbes représentatives, à leurs dérivées, à leur limite et aux fonctions que l'on peut construire en les combinant à d'autres fonctions (comme par exemple  $x \mapsto \cos(2x)$ ).

**Objectifs :** Cochez ce qui est acquis pour vérifier que vous êtes au point sur ce chapitre.

### Classes précédentes

- Notions à connaître : cercle trigonométrique, radian, sens trigonométrique.
- Connaître les valeurs remarquables de sinus et cosinus, par exemple  $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$  ou  $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
- Définition de la mesure d'un angle orienté.
- Savoir trouver la mesure principale d'un angle orienté.
- Savoir utiliser le cercle trigonométrique pour déterminer les sinus et cosinus d'angles associés, par exemple savoir exprimer  $\cos(x+\pi)$  en fonction de  $\cos x$ .
- Connaître et savoir utiliser les propriétés  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$   $-1 \leq \cos t \leq 1$  et  $-1 \leq \sin t \leq 1$ .
- Savoir résoudre dans  $\mathbb{R}$  des équations de la forme  $\cos x = \cos a$  ou  $\sin x = \sin a$ .

### Terminale

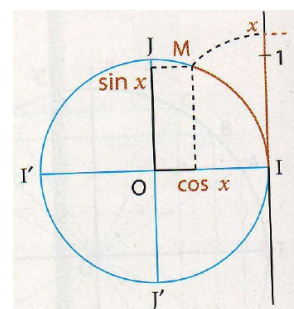
- Connaître les limites de référence (càd les limites des taux de variations de  $\sin$  et  $\cos$  en 0)
- Connaître les dérivées de sinus et cosinus.
- Connaître les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus.
- Connaître et savoir utiliser la parité et la périodicité des fonctions sinus et cosinus et plus généralement, savoir prouver et utiliser le fait qu'une fonction est paire, impaire ou périodique.

## I. Jusqu'en Première, la trigo, cela se passait sur un cercle....

**Définition 1.** Soit  $x$  un nombre réel et  $M$  son image sur le cercle trigonométrique  $\mathcal{C}$  (par enroulement des réels sur le cercle)

L'abscisse du point  $M$  est appelée **cosinus du réel  $x$**  et notée  $\cos x$ .

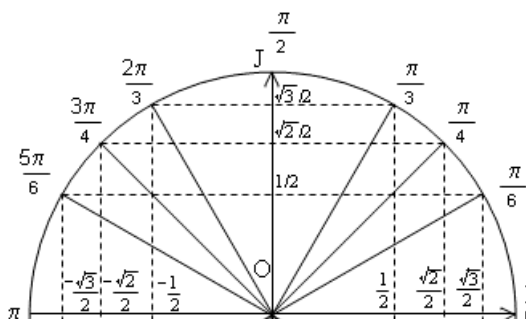
L'ordonnée du point  $M$  est appelée **sinus du réel  $x$**  et notée  $\sin x$ .



**Remarque :** Pour calculer le cosinus ou le sinus d'un nombre réel à la calculatrice, il faut que celle-ci soit réglée en radians et pas en degrés.

### A. Valeurs remarquables (à connaître!)

| $t$      | 0 | $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ | $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ | $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ | $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ |
|----------|---|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $\cos t$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$       | $\frac{\sqrt{2}}{2}$       | $\frac{1}{2}$              | 0                          |
| $\sin t$ | 0 | $\frac{1}{2}$              | $\frac{\sqrt{2}}{2}$       | $\frac{\sqrt{3}}{2}$       | 1                          |



### B. Propriétés

**Propriétés 2.** Pour tout réel  $t$ , on a

- $\cos(t + 2k\pi) = \cos t$
- $\sin(t + 2k\pi) = \sin t$
- $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$
- $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$
- $-1 \leq \cos t \leq 1$
- $-1 \leq \sin t \leq 1$

### C. Angles associés

A savoir retrouver instantanément ou presque sur le cercle trigonométrique:

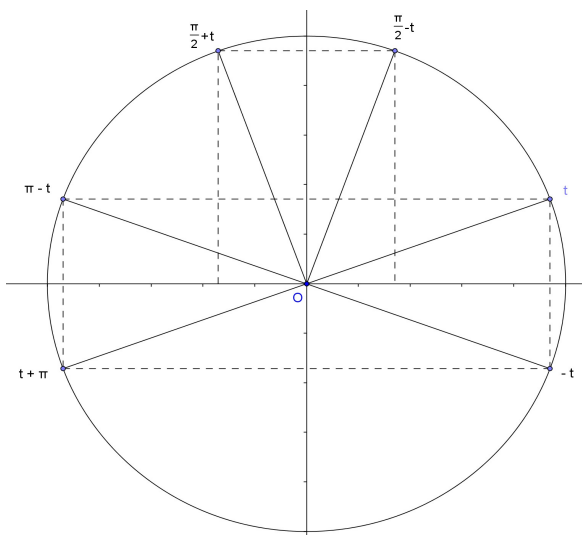
- $\cos(-t) = \cos t$       ▪  $\sin(-t) = -\sin t$
- $\cos(t + \pi) = -\cos t$     ▪  $\sin(t + \pi) = -\sin t$
- $\cos(\pi - t) = -\cos t$     ▪  $\sin(\pi - t) = \sin t$

Les formules suivantes sont plus difficiles à retrouver sur le cercle. Si vous avez du mal à les retrouver sur le cercle, apprenez-les:

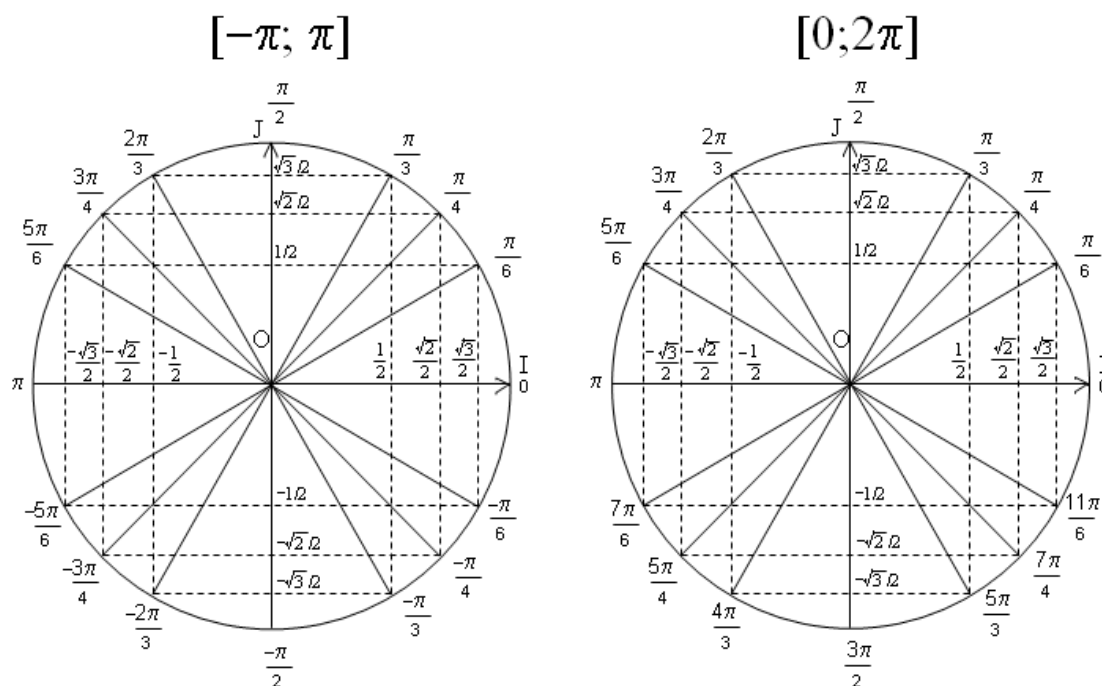
- $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$     ▪  $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$

«  $\frac{\pi}{2}$  — ... inverse sin et cos. »:

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$       ▪  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$



Les valeurs des figures ci-contre se déduisent des valeurs remarquables par les angles associés. Il faut savoir les retrouver rapidement.



### D. Équations trigonométriques

On les résout au moyen du cercle trigonométrique (sans oublier les  $2k\pi$ ) ou on utilise directement le résultat suivant (vu en Première) :

#### Propriété 3.

- $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$  ou  $x = -a + 2k\pi$
- $\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$  ou  $x = \pi - a + 2k\pi$ .

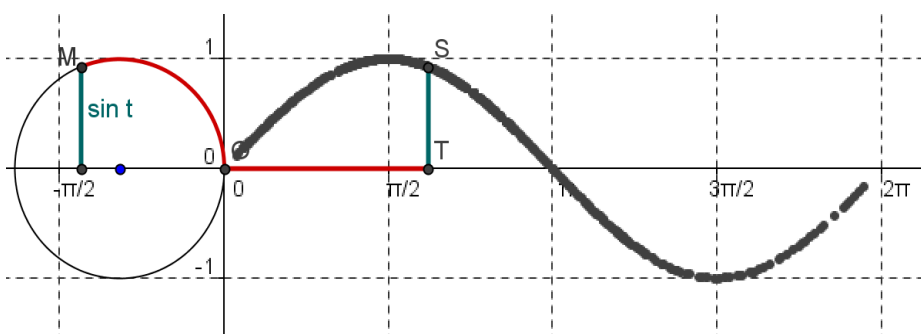
Ne pas oublier les  $2k\pi$  et si on a par exemple  $3x$  au lieu de  $x$ , se rappeler que tout sera divisé par 3, y compris le  $2k\pi$ .

### E. Formules d'addition et de duplication

|  |  |   |
|--|--|---|
| <b>P 4.</b> Formules d'addition  | $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$<br>$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$<br>$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$<br>$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ | <i>Moyen mnémotechnique:</i><br>Sinus est simple et sympa.<br>Cosinus est égoïste et compliqué. |
| <b>P 5</b> Formules de duplication<br><i>(conséquence des précédentes)</i> | $\forall a, \sin(2a) = 2 \sin a \cos a$ $\forall a, \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$<br>$= 2 \cos^2 a - 1$<br>$= 1 - 2 \sin^2 a$  |   |

## II. En Terminale, on déroule pour avoir des fonctions

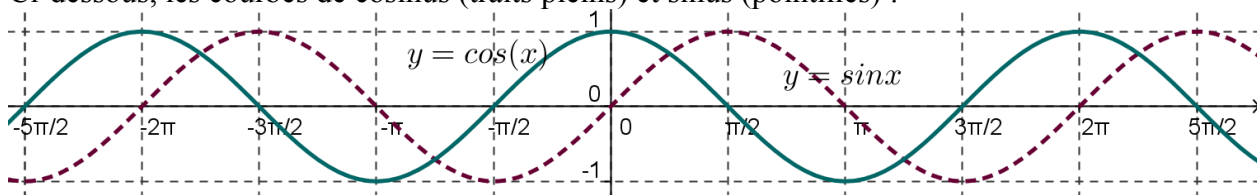
### A. Courbes représentatives, parité, périodicité



On obtient les courbes représentatives de sinus et cosinus à partir du cercle trigonométrique, voir animations sur les site <http://mathematoques.weebly.com>.

Ci-contre, celle de sinus.

Ci-dessous, les courbes de cosinus (traits pleins) et sinus (pointillés) :



Premières observations (définitions rigoureuses plus bas)

- Chacune des courbes est formée d'un motif qui se répète à l'infini : On dit que les fonctions sont *périodiques*.
- La courbe de cosinus (traits pleins) est symétrique par rapport à l'axe des y : La fonction cosinus est *paire*.
- La courbe de sinus (pointillés) est symétrique par rapport à l'origine : La fonction sinus est *impaire*.

**Définition et propriétés 6.** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ .

| La fonction $f$ est .... | <i>paire</i>   | <i>impaire</i>   | <i>périodique de période T</i>  |
|--------------------------|--|--|---|
| signifie que ...         | $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$   | $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$  | $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$   |
| et cela entraîne :       | La courbe représentative de $f$ est symétrique par rapport à l' <u>axe des ordonnées</u> . | La courbe représentative de $f$ est symétrique par rapport à l' <u>origine</u> . | La courbe représentative de $f$ est invariante par translation de vecteur $T \vec{i}$ . |
| Exemples                 | $x \mapsto x^2, x \mapsto \cos x$  | $x \mapsto \frac{1}{x}, x \mapsto x^3, x \mapsto \sin x$                         | $x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x$ sont $2\pi$ -périodiques                           |

### B. Limites à connaître (ce sont des formes indéterminées récalcitrantes)

**Propriété 7.** Si  $x$  est un réel ou un angle exprimé en radians,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

D'où sort  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  ? Pour donner idée intuitive, faire dessin et quand  $x$  petit, les longueurs  $x$  et  $\sin x$  sont proches OU par les aires, voir démonstration pas à pas : [http://lycee-valin.fr/maths/exercices\\_en\\_ligne/limsinus.html](http://lycee-valin.fr/maths/exercices_en_ligne/limsinus.html) puis montrer qu'on peut en déduire la limite avec cos.

## C. Dérivées de fonctions trigonométriques

### Théorème 8:

■ Si  $x$  est un réel ou un angle exprimé en radians,  $\cos'(x) = -\sin(x)$  et  $\sin'(x) = \cos(x)$ .

■ Et s'il y a autre chose que  $x$  dans la fonction?

Si la fonction  $u$  est dérivable (et exprimée en radians) alors la dérivée de la fonction

$x \mapsto \cos(u(x))$  est la fonction  $x \mapsto \underbrace{-\sin}_{\substack{\text{dérivée de} \\ \text{la fonction} \\ \text{extérieure}}}(\underbrace{u(x)}_{\substack{\text{fonction} \\ \text{intérieure} \\ \text{inchangée}}}) \times \underbrace{u'(x)}_{\substack{\text{dérivée de} \\ \text{la fonction} \\ \text{intérieure}}}$

et la dérivée de la fonction  $x \mapsto \sin(u(x))$  est la fonction  $x \mapsto \underbrace{\cos}_{\substack{\text{dérivée de} \\ \text{la fonction} \\ \text{extérieure}}}(u(x)) \times \underbrace{u'(x)}_{\substack{\text{fonction} \\ \text{intérieure} \\ \text{inchangée}}}$

On retient :  $(\cos u)' = (-\sin u) \times u'$  et  $(\sin u)' = (\cos u) \times u'$  [sinus est toujours sympa]

Remarque : Les formules de dérivées rappellent «  $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$  et  $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$  » et voilà pourquoi certains enseignants de physique disent « *dérivée, c'est rajouter  $\frac{\pi}{2}$*  ». Cela aide à retenir les unes à partir des autres.

### Table des matières

|   |          |
|---|----------|
| <b>I. En Première, la trigo cela se passait sur un cercle.....</b>            | <b>1</b> |
| A. Valeurs remarquables (à connaître!).....                                   | 1        |
| B. Propriétés.....  | 1        |
| C. Angles associés.....   | 2        |
| D. Équations trigonométriques.....  | 2        |
| E. Formules d'addition et de duplication.....                                 | 2        |
| <b>II. En Terminale, on déroule pour avoir des fonctions.....</b>             | <b>3</b> |
| A. Courbes représentatives, parité, périodicité.....                          | 3        |
| B. Limites à connaître (ce sont des formes indéterminées récalcitrantes)..... | 3        |
| C. Dérivées de fonctions trigonométriques.....                                | 3        |

### Le programme officiel

|                                   |  |  |
|-----------------------------------|--|--|
| <b>Fonctions sinus et cosinus</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Connaître la dérivée des fonctions sinus et cosinus.</li> <li>• Connaître quelques propriétés de ces fonctions, notamment parité et périodicité.</li> <li>• Connaître les représentations graphiques de ces fonctions.</li> </ul> | <p>On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 et la limite en 0 de <math>\frac{\sin x}{x}</math>.</p> <p>En dehors des exemples étudiés, aucun développement n'est attendu sur les notions de périodicité et de parité.</p> <p>On fait le lien entre les résultats obtenus en utilisant le cercle trigonométrique et les représentations graphiques des fonctions <math>x \mapsto \cos x</math> et <math>x \mapsto \sin x</math>.</p> <p>⇔ [SPC] Ondes progressives sinusoïdales, oscillateur mécanique.</p> |
|-----------------------------------|--|--|

Notre progression : Idem, RAS