Fonctions Trigonométriques | T.S.

Introduction :

En seconde et en première, nous avons interprété cos et sin comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point du cercle trigonométrique et nous avons utilisé le cercle trigonométrique pour résoudre des équations.

En terminale, on va traiter sin et cos comme des fonctions et, comme pour n'importe quelle fonction, on va s'intéresser à leurs courbes représentatives, à leurs dérivées, à leur limite et aux fonctions que l'on peut construire en les combinant à d'autres fonctions (comme par exemple $x \mapsto \cos(2x)$).

Objectifs : *Cochez ce qui est acquis pour vérifier que vous êtes au point sur ce chapitre.*

Classes précédentes

- ☐ Notions à connaître : cercle trigonométrique, radian, sens trigonométrique.
- ☐ Connaître les valeurs remarquables de sinus et cosinus, par exemple $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ou $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
- ☐ Définition de la mesure d'un angle orienté.
- ☐ Savoir trouver la mesure principale d'un angle orienté.
- ☐ Savoir utiliser le cercle trigonométrique pour déterminer les sinus et cosinus d'angles associés, par exemple savoir exprimer $\cos(x+\pi)$ en fonction de $\cos x$.
- ☐ Connaître et savoir utiliser les propriétés $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$.
- ☐ Savoir résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations de la forme $\cos x=\cos a$ ou $\sin x=\sin a$.

Terminale

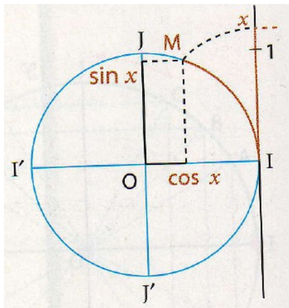
- ☐ Connaître les limites de référence (càd les limites des taux de variations de sin et cos en 0)
- ☐ Connaître les dérivées de sinus et cosinus.
- ☐ Connaître les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus.
- ☐ Connaître et savoir utiliser la parité et la périodicité des fonctions sinus et cosinus et plus généralement, savoir prouver et utiliser le fait qu'une fonction est paire, impaire ou périodique.

I. Jusqu'en Première, la trigo, cela se passait sur un cercle....

Définition 1. Soit x un nombre réel et M son image sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ (par enroulement des réels sur le cercle)

L'abscisse du point M est appelée ***cosinus du réel x*** et notée $\cos x$.

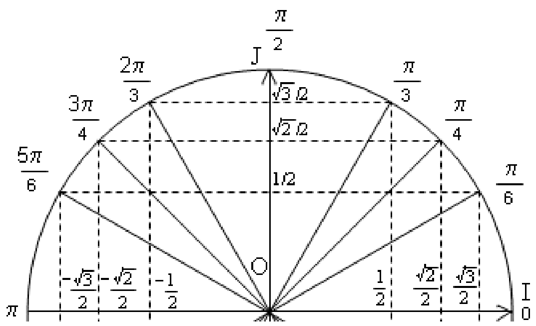
L'ordonnée du point M est appelée ***sinus du réel x*** et notée $\sin x$.



Remarque : Pour calculer le cosinus ou le sinus d'un nombre réel à la calculatrice, il faut que celle-ci soit réglée en radians et pas en degrés.

A. Valeurs remarquables (à connaître!)

t	0	$\frac{\pi}{6}=30°$	$\frac{\pi}{4}=45°$	$\frac{\pi}{3}=60°$	$\frac{\pi}{2}=90°$
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



B. Propriétés

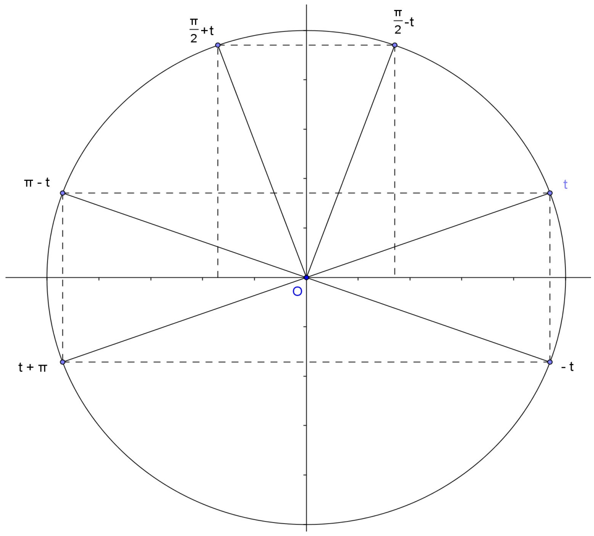
Propriétés 2. Pour tout réel t , on a

- $\cos(t+2k\pi)=\cos t$
- $\sin(t+2k\pi)=\sin t$
- $\cos^2 t+\sin^2 t=1$
- $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$
- $\tan t=\frac{\sin t}{\cos t}$

C. Angles associés

A savoir retrouver instantanément ou presque sur le cercle trigonométrique:

- $\cos(-t)=\cos t$ - $\sin(-t)=-\sin t$
- $\cos(t+\pi)=-\cos t$ - $\sin(t+\pi)=-\sin t$
- $\cos(\pi-t)=-\cos t$ - $\sin(\pi-t)=\sin t$



Les formules suivantes sont plus difficiles à retrouver sur le cercle. Si vous avez du mal à les retrouver sur le cercle, apprenez-les:

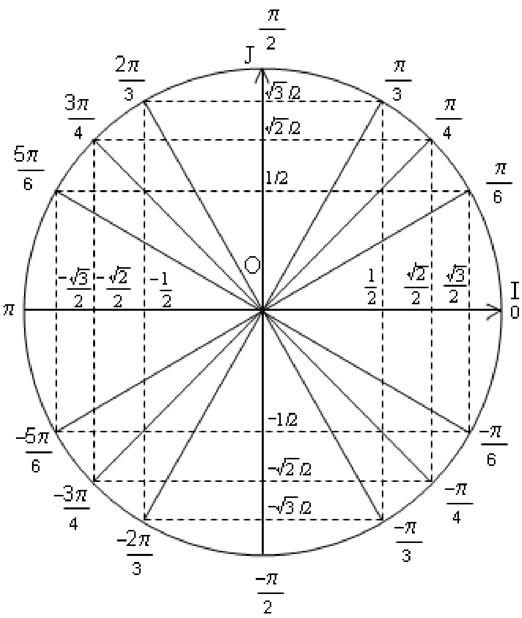
- $\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin t$ - $\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t$

« $\frac{\pi}{2}-\ldots$ inverse sin et cos. » :

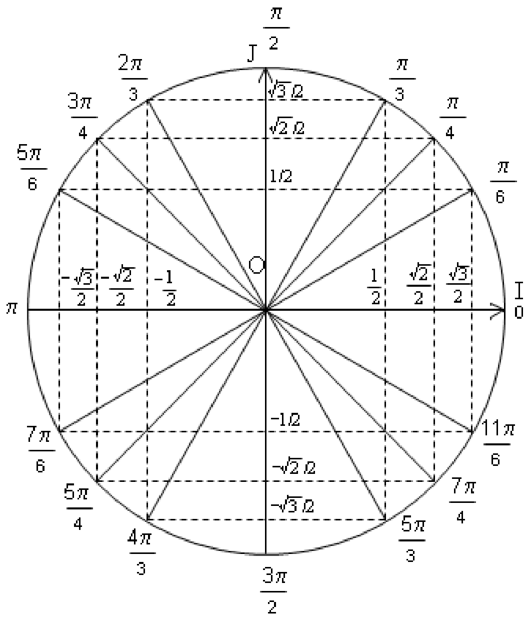
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$ - $\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$

Les valeurs des figures ci-contre se déduisent des valeurs remarquables par les angles associés. Il faut savoir les retrouver rapidement.

$[-\pi;\ \pi]$



$[0;2\pi]$



D. Équations trigonométriques

On les résout au moyen du cercle trigonométrique (sans oublier les 2kπ) ou on utilise directement le résultat suivant (vu en Première) :

Propriété 3.
- $\cos x=\cos a \iff x=a+2k\pi$ ou $x=\boldsymbol{-a}+2k\pi$
- $\sin x=\sin a \iff x=a+2k\pi$ ou $x=\boldsymbol{\pi-a}+2k\pi$.

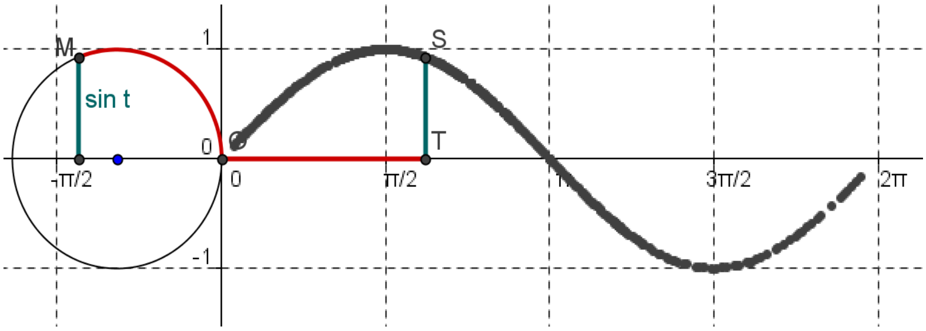
Ne pas oublier les 2kπ et si on a par exemple 3x au lieu de x, se rappeler que tout sera divisé par 3, y compris le 2kπ .

E. Formules d'addition et de duplication

P 4. Formules d'addition	$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$	*Moyen mnémotechnique:* Sinus est simple et sympa. Cosinus est égoïste et compliqué.
P 5 Formules de duplication *(conséquence des précédentes)*	$\forall a,\ \sin(2a)=2\sin a\cos a$	$\forall a,\ \cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a$ $=2\cos^2 a-1$ $=1-2\sin^2 a$

II. En Terminale, on déroule pour avoir des fonctions

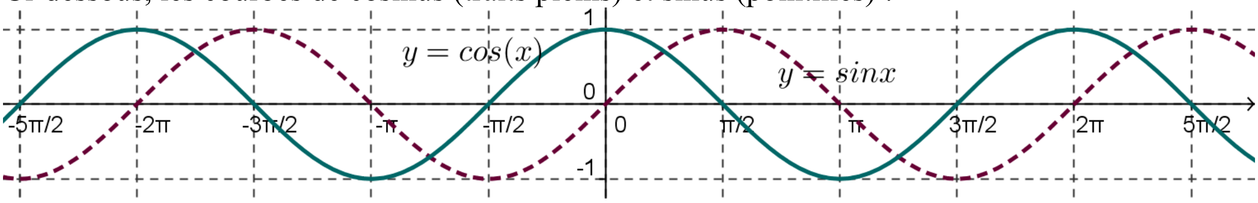
A. Courbes représentatives, parité, périodicité



On obtient les courbes représentatives de sinus et cosinus à partir du cercle trigonométrique, voir animations sur les site http://mathematoques.weebly.com .

Ci-contre, celle de sinus.

Ci-dessous, les courbes de cosinus (traits pleins) et sinus (pointillés) :



Premières observations (définitions rigoureuses plus bas)

- Chacune des courbes est formée d'un motif qui se répète à l'infini : On dit que les fonctions sont *périodiques*.
- La courbe de cosinus (traits pleins) est symétrique par rapport à l'axe des y : La fonction cosinus est *paire*.
- La courbe de sinus (pointillés) est symétrique par rapport à l'origine : La fonction sinus est *impaire*.

Définition et propriétés 6. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est	***paire***	***impaire***	***périodique de période T***
signifie que ...	$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$
et cela entraîne :	La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.	La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine.	La courbe représentative de f est invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$.
Exemples	$x \mapsto x^2$, $x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$ $x \mapsto \sin x$ sont 2π -périodiques

B. Limites à connaître (ce sont des formes indéterminées récalcitrantes)

Propriété 7. Si x est un réel ou un angle exprimé en radians,

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

D'où sort $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$? Pour donner idée intuitive, faire dessin et quand x petit, les longueurs x et sin x sont proches OU par les aires, voir démonstration pas à pas : http://lycee-valin.fr/maths/exercices_en_ligne/limsinus.html puis montrer qu'on peut en déduire la limite avec cos.

C. Dérivées de fonctions trigonométriques

Théorème 8:

■ Si x est un réel ou un angle exprimé en radians, $\cos'(x)=-\sin(x)$ et $\sin'(x)=\cos(x)$.

■ Et s'il y a autre chose que x dans la fonction?

Si la fonction u est dérivable (et exprimée en radians) alors la dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(u(x))$ est la fonction $x \mapsto \underbrace{-\sin}_{\substack{\text{dérivée de}\\ \text{la fonction}\\ \text{extérieure}}} (\underbrace{u(x)}_{\substack{\text{fonction}\\ \text{intérieure}\\ \text{inchangée}}}) \times \underbrace{u'(x)}_{\substack{\text{dérivée de}\\ \text{la fonction}\\ \text{intérieure}}}$

et la dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(u(x))$ est la fonction $x \mapsto \underbrace{\cos}_{\substack{\text{dérivée de}\\ \text{la fonction}\\ \text{extérieure}}} (\underbrace{u(x)}_{\substack{\text{fonction}\\ \text{intérieure}\\ \text{inchangée}}}) \times \underbrace{u'(x)}_{\substack{\text{dérivée de}\\ \text{la fonction}\\ \text{intérieure}}}$

On retient : $(\cos u)'=(-\sin u)\times u'$ et $(\sin u)'=(\cos u)\times u'$ [sinus est toujours sympa]

Remarque : Les formules de dérivées rappellent « $\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin t$ et $\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t$ » et voilà pourquoi certains enseignants de physique disent « *dériver, c'est rajouter* $\frac{\pi}{2}$.» Cela aide à retenir les unes à partir des autres.

Table des matières

I.En Première, la trigo cela se passait sur un cercle....................................1

A.Valeurs remarquables (à connaître!)....................1

B.Propriétés....................1

C.Angles associés....................2

D.Équations trigonométriques....................2

E. Formules d'addition et de duplication....................2

II. En Terminale, on déroule pour avoir des fonctions....................................3

A.Courbes représentatives, parité, périodicité....................3

B.Limites à connaître (ce sont des formes indéterminées récalcitrantes)....................3

C.Dérivées de fonctions trigonométriques....................3

Le programme officiel

Fonctions sinus et cosinus	• Connaître la dérivée des fonctions sinus et cosinus. • Connaître quelques propriétés de ces fonctions, notamment parité et périodicité. • Connaître les représentations graphiques de ces fonctions.	On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 et la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$. En dehors des exemples étudiés, aucun développement n'est attendu sur les notions de périodicité et de parité. On fait le lien entre les résultats obtenus en utilisant le cercle trigonométrique et les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$. ⇆ [SPC] Ondes progressives sinusoïdales, oscillateur mécanique.

Notre progression : Idem, RAS