EXERCICES Fonctions Trigonométriques	T.S.

Gestion du document : pour masquer les CORRigés et les exercices En Préparation : CORR=V et EP=M

Activités d'approche et révisions

○ Exercice TRIGO 1. Exercices de la classe virtuelle WIMS pour vérifier que tout le monde sait s'y connecter.

○ Exercice TRIGO 2. Exprimer la forme algébrique du nombre complexe $z=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^2$ en fonction de $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$.

○ Exercice TRIGO 3. Résoudre dans ℝ l'équation $2\sqrt{3}\sin(2x)-3=0$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

○ Exercice TRIGO 4. [Idée : , feuille « Maths à Valin ».]

1) Au moyen du cercle trigonométrique, donner le tableau de variation des fonctions de sinus et cosinus sur $[0,\pi]$.

2) Dans cette question on va tracer les courbes représentatives de sinus et cosinus à l'aide du cercle trigonométrique :

a) A gauche de votre feuille, tracer un cercle trigonométrique et y placer les réels 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$ et π . En parallèle, compléter le tableau des valeurs remarquables (à connaître!).

t	0	$\frac{\pi}{6}$ =30º	$\frac{\pi}{4}$ =45º	$\frac{\pi}{3}$ =60º	$\frac{\pi}{2}$ =90º
$\cos t$					
$\sin t$					

b) Tracer les axes d'un repère orthonormé tel que le centre de votre cercle trigonométrique ait pour coordonnées $(-1,0)$

c) Tracer la courbe représentative de sinus sur $[0,\pi]$. *On commencera par tracer en pointillés les droites d'équation* $y=1$, $y=\frac{1}{2},$ $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ *au moyen du cercle trigonométrique .*

d) Tracer la courbe représentative de cosinus sur $[0,\pi]$.

3) Vérifier que les courbes représentatives de sinus et cosinus sont cohérentes avec le tableau de variation des fonctions de sinus et cosinus sur $[0,\pi]$ obtenues en 1) à l'aide du cercle trigonométrique.

○ Exercice TRIGO 5.

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=\cos(2x)-7\cos x-3$

1) Exprimer f en fonction de $\cos x$ seulement.

2) Donnez une expression factorisée de $f(x)$.

3) Déterminer l'abscisse des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

○ Exercice TRIGO 6.

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=4\sin^4(x)-3\cos x$. Noémie doit calculer la valeur exacte de certaines intégrales pour le prochain cours de maths. Heureusement, sa grande sœur qui a fait une prépa est de passage à Dakar et elle lui dit que A= $\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}-3$ et « *à partir de là, débrouille-toi pour en déduire les autres, je dois y aller, mes copains m'attendent*». Les autres intégrales à calculer sont B= $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x$ et C= $\int_{8\pi}^{\frac{15\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1) Tracez $\mathscr{C}_f$ à la calculatrice, observez des propriétés qui peuvent permettre de calculer B et C (*je sais, c'est vague, c'est fait exprès*) puis prouvez vos conjectures.

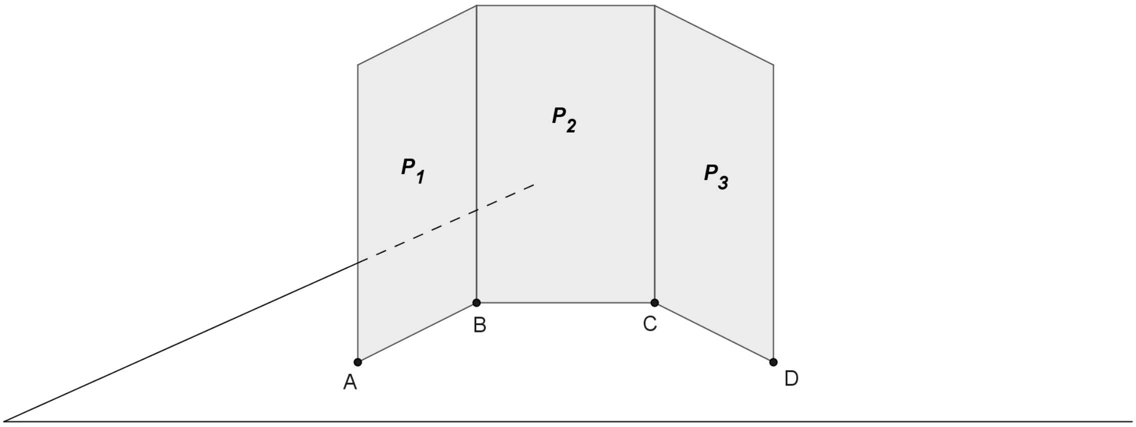
2) Déterminez la valeur exacte des intégrales B et C.

○ Exercice TRIGO 7. Le paravent [source : site de G Costantini.]

Échauffement. Résoudre l'inéquation : $-2X^2 - X + 1 \geqslant 0$

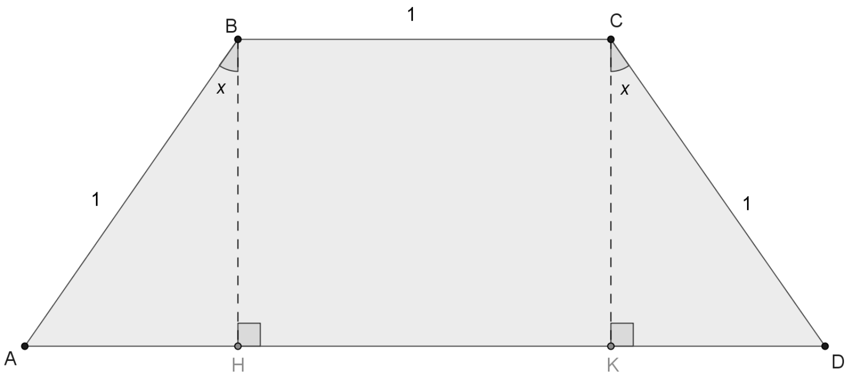
Problème : le paravent.

Un paravent est constitué de trois panneaux verticaux P_1, P_2 et P_3 (de formes rectangulaires) articulés en *B* et *C*.



On suppose que les panneaux ont une largeur de 1 m ($AB = BC = CD = 1$) et que l'angle d'ouverture de P_1 et P_3 est le même. Le but du problème est de rechercher l'ouverture qu'il faut donner aux panneaux pour que la stabilité du paravent soit maximale. On admet (propriété physique) que la stabilité du paravent est maximale lorsque l'aire du "polygone de sustentation" (dans notre cas, il s'agit du trapèze isocèle *ABCD*) est maximale.

Représentation du polygone de sustentation en vue de dessus :



On note *H* et *K* les projetés respectifs de *B* et *C* sur [*AD*] et *x* l'angle $\widehat{ABH} = \widehat{KCD}$.

On suppose que $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

1- Calculer l'aire $S(x)$ du trapèze *ABCD*.

2- Calculer la dérivée *S* ' de la fonction *S* puis démontrer que $S'(x) = -2\sin^2 x - \sin x + 1$.

3- Étudier le signe de *S* ' pour $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. (on pourra poser $X = \sin x$ et utiliser l'exercice d'échauffement)

4- Dresser le tableau de variations de la fonction *S* sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

5- Tracer la représentation graphique de la fonction *S*.

6- Pour quel angle x la stabilité du paravent est-elle maximale ?

○ Exercice TRIGO 8. Calculer a= $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}$; b= $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}$; c= $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ d= $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}$; e= $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x}$; f= $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}$; g= $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{5x}$; h= $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{6x^2}$; i= $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(x)}$

○ Exercice TRIGO 9. La fonction tangente est définie par $\tan(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$.

1) Étudier la parité et la périodicité de *f*. En déduire que l'on peut réduire le domaine d'étude.

2) Montrer que la fonction *tangente* a pour dérivée $\tan'(x)=1+\tan^2 x$ sur son domaine de définition.

3) Dresser le tableau de variation complet de la fonction *tangente* sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

○ Exercice TRIGO 10.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction sinus et soit T sa tangente en 0.

1) Montrer que $\forall x\geqslant 0$, $\mathscr{C}$ est toujours en dessous de T.

2) Sans faire aucun calcul, déterminer les positions relatives de C et T pour $x\in]-\infty,0]$.

○ Exercice TRIGO 11.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|\cos x|+\cos x$.

1) Étudier la parité de la fonction f.

2) Étudier la périodicité de la fonction f.

3) Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$.

○ Exercice TRIGO 12.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(2x)-2\cos x$.

1) Étudier la parité de la fonction f.

2) Étudier la périodicité de la fonction f.

3) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0;\pi]$.

4) Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$.

○ Exercice TRIGO 13. k étant un nombre réel, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{4x+\sin(2x)}{x} & si\ x\neq 0 \\ f(0)=k \end{cases}$$

1) Montrer qu'il existe une valeur de k pour laquelle f est continue en 0. On supposera que k est égal à cette valeur dans tout ce qui suit.

2) Déterminer toutes les asymptotes de la représentation graphique f.

○ Exercice TRIGO 14. *Correction disponible*

On considère la fonction *f* définie par $f(x)=3\cos(2x+\frac{\pi}{2})$.

1) Donner le domaine de définition de *f*.

2) Montrer que pour tout x ∈ $\mathbb{R}$, on a: $-3 \leqslant f(x) \leqslant 3$. Que peut-en en déduire sur la courbe représentative de *f* ?

3) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x+\pi)=f(x)$. En déduire que *f* est périodique et préciser sa période. Que peut-on en déduire sur sa courbe représentative?

4) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-6\sin(2x+\frac{\pi}{2})$.

5) Montrer que si $x\in[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$, alors $2x+\frac{\pi}{2}\in[0;\pi]$. En déduire le signe de f' sur $[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$. Étudier de même le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}]$

6) Dresser le tableau de variations de *f* sur $[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}]$.

7) Donner l'équation de la tangente en *f* au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.

8) Tracer la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé ainsi que sa tangente en $\frac{\pi}{4}$.

○ Exercice TRIGO 15. Démontrer que l'équation $\cos(4x+2)-8x=-1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et en donner un encadrement à 10^{-2} près au moyen de la calculatrice.

○ Exercice TRIGO 16. On veut étudier l'existence et le nombre d'extremum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-2\sin x$. Pour cela on étudie d'abord la fonction f' dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

1) Étude de f' :

a) Vérifier que $f'(x)=2(x-\cos x)$ et étudier les variations de f' sur $\mathbb{R}$.
b) Préciser les limites de f' en $+\infty$ et $-\infty$.

2) Montrer que l'équation $f'(x)=0$ admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$, notée α . Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

3) Donner le signe de f' sur $\mathbb{R}$. En déduire le tableau de variations de f et justifier l'existence d'un seul minimum m pour f.

4) Montrer que m vérifie $m=\alpha^2-2\sqrt{1-\alpha^2}$.

○ Exercice TRIGO 17. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ -x^2\leqslant f(x)\leqslant x^2$

2) En déduire que f est continue et dérivable en 0.

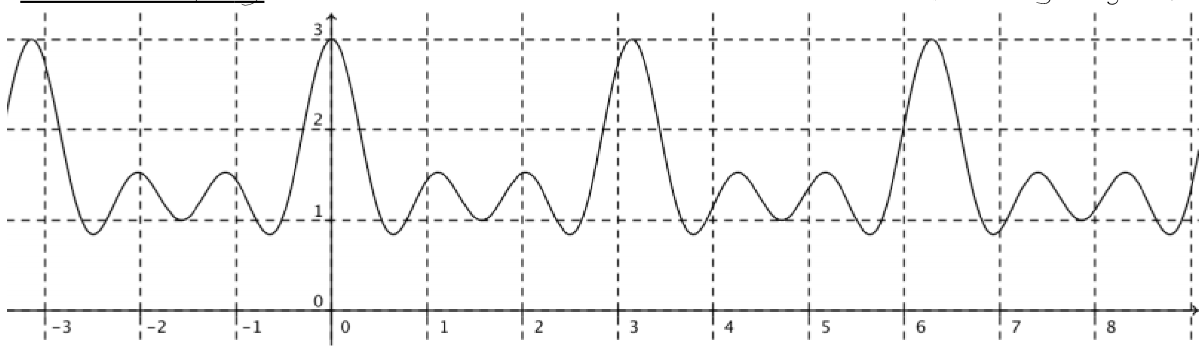
○ Exercice TRIGO 18.

On considère g la fonction définie par : $g(0)=0$ et $g(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x\neq 0$.

On note (C) la courbe représentative de cette fonction dans un repère du plan.
1. Montrer que $-x^2\leq g(x)\leq x^2$ puis en déduire que g est continue et dérivable en 0.
2. Quelle est la tangente à (C) au point d'abscisse 0 ?
3. a. Résoudre l'équation $g(x)=0$.
3. b. Montrer que pour tout $\varepsilon>0$, l'équation $g(x)=0$ admet une infinité de solutions dans l'intervalle $[0;\varepsilon]$
4. Que penser alors de l'affirmation suivante : « une tangente à une courbe (C) en un point A ne coupe pas (C) en un autre point que A au voisinage de A » ?
5. Donner l'allure de (C) au voisinage de 0.

Correction non disponible

○ Exercice TRIGO 19. [Source : J Mugnier]



Résoudre l'équation $\cos^2 x+\cos^2(2x)+\cos^2(3x)=k$ lorsque :

a) $k>3$ b) $k<0$ c) $k=3$ d) $k=0$ e) $k=1$ (très difficile !)

○ Exercice TRIGO 20.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-4\sin^3 x$

1) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

2) a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $\frac{\pi}{3}$.

b) Trouver une valeur x_0 de l'intervalle $[0;2\pi]$ pour laquelle la tangente à la courbe représentative de f est parallèle à la tangente T définie plus haut.

○ Exercice TRIGO 21. **Type BACCALAURÉAT**

On considère la suite (u_n) de premier terme $u_0=0$ et définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+u_n}$.

1) Démontrer que pour tout entier $n>0$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant u_n\leqslant 1$.

2) Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[0;\pi]$, $\sqrt{\frac{1+cos\,x}{2}}=cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n $u_n=cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

4) Déterminer la limite de la suite (u_n).

○ Exercice TRIGO 22. **Type BACCALAURÉAT**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2+\cos x)e^{1-x}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Démontrer que pour tout entier x de $\mathbb{R}$, $f(x)>0$.

2) a) Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sqrt{2}cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=cos\,x+sin\,x$.

b) En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $2+cos\,x+sin\,x>0$.

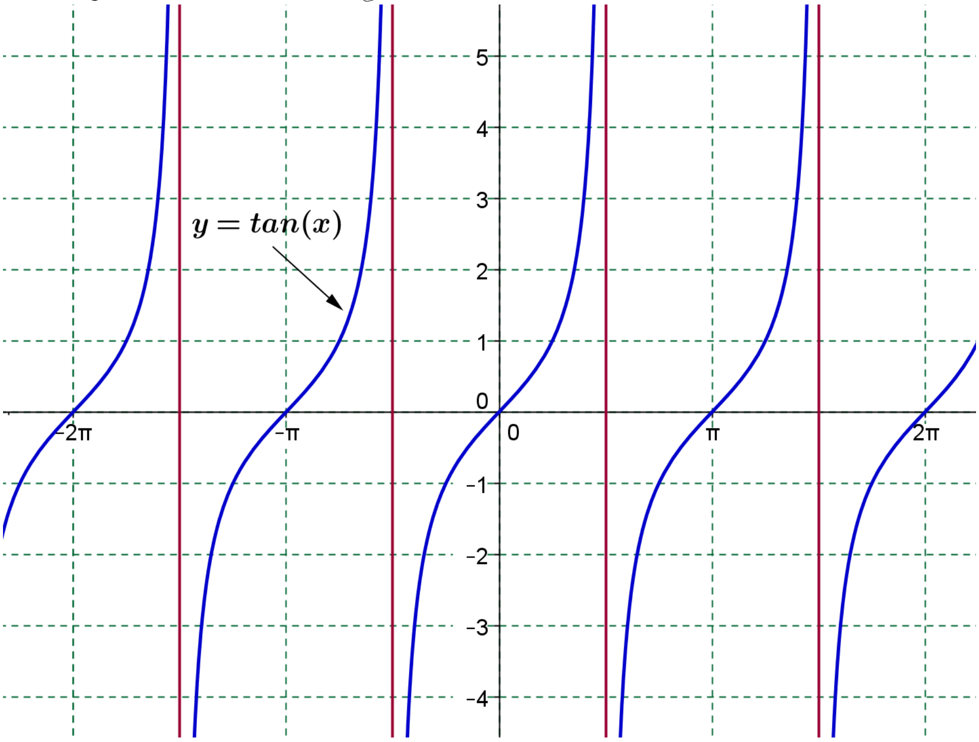
c) En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer les limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

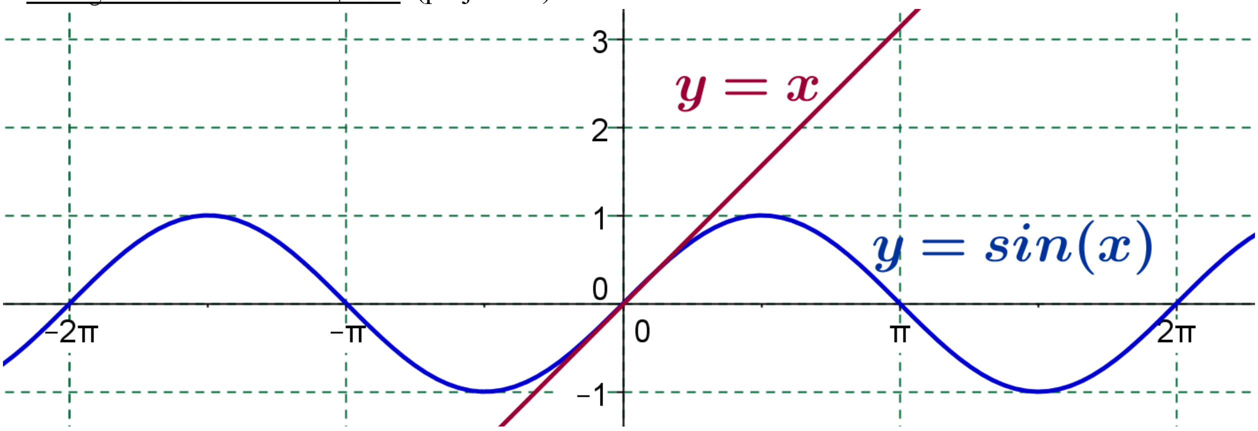
4) Démontrer que dans l'intervalle $[0;\pi]$, l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution α dont vous donnerez un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

Corrigés

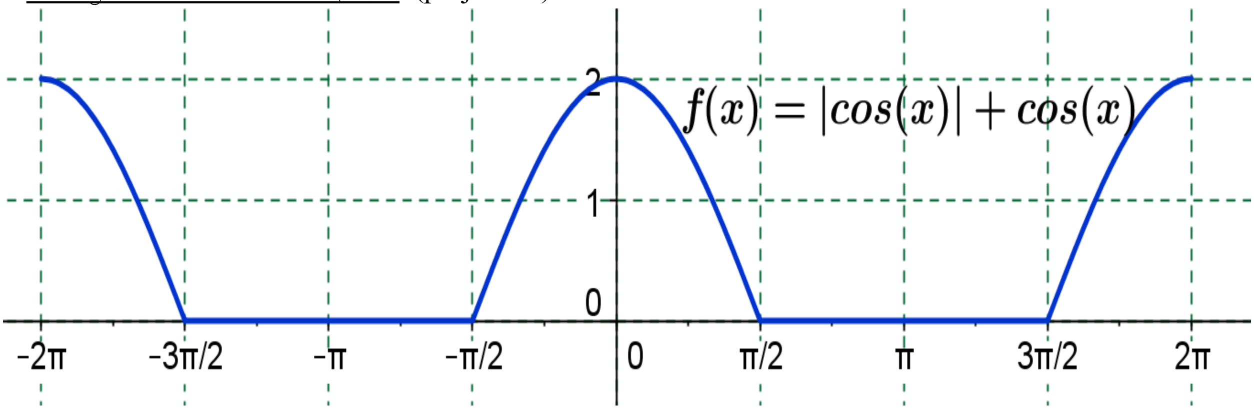
♠ Corrigé de l'exercice TRIGO 9. (projetable)



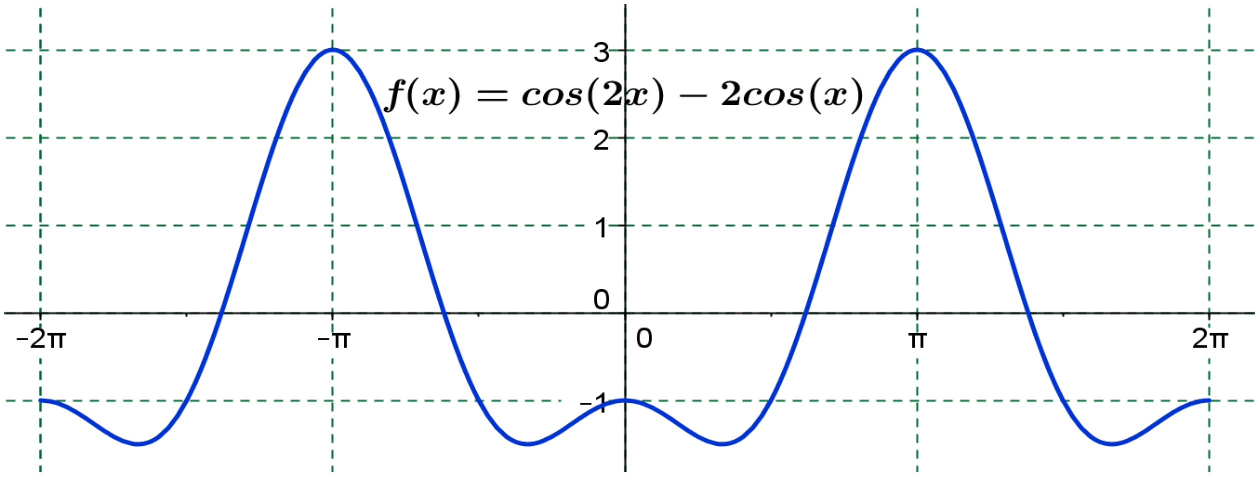
♠ Corrigé de l'exercice TRIGO 10. (projetable)



♠ Corrigé de l'exercice TRIGO 11. (projetable)



♠ Corrigé de l'exercice TRIGO 12. (projetable)



♠ Corrigé de l'exercice TRIGO 14. ***Corrigé*** : $f(x)=3\cos(2x+\frac{\pi}{2})$

1) Donner le domaine de définition de *f*. $D_f = \mathbb{R}$

2) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a: $-3 \leqslant f(x) \leqslant 3$.

Pour tout réel α, on a: $-1 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1$

En particulier, pour $\alpha=2x+\frac{\pi}{2}$, on a: $-1\leqslant\cos(2x+\frac{\pi}{2})\leqslant 1$

D'où $-3\leqslant 3\cos(2x+\frac{\pi}{2})\leqslant 3$

Soit: $\boxed{-3\leqslant f(x)\leqslant 3}$

On en déduit que la courbe représentative de *f* est comprise entre les droites d'équation y = -3 et y = 3.

3) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi)=f(x)$

$f(x+\pi)=3\cos(2(x+\pi)+\frac{\pi}{2})=3\cos(2x+2\pi+\frac{\pi}{2})=3\cos(2x+\frac{\pi}{2}+2\pi)=3\cos(2x+\frac{\pi}{2})=f(x)$

car la fonction cosinus est périodique de période 2π

On en déduit que la fonction *f* est périodique de période π. On en déduit que la courbe représentative de la fonction *f* est invariante par translation de vecteur $\pi\vec{i}$

4) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=-6\sin(2x+\frac{\pi}{2})$.

$\cos(2x+\frac{\pi}{2})$ est de la forme u(ax + b) avec a = 2 et b = $\frac{\pi}{2}$

$(\cos(2x+\frac{\pi}{2}))'=2\times(-\sin(2x+\frac{\pi}{2}))=-2\sin(2x+\frac{\pi}{2})$

D'où $\boxed{f'(x)=-6\sin(2x+\frac{\pi}{2})}$

6) Montrons que si $x\in[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$, alors $2x+\frac{\pi}{2}\in[0;\pi]$

$x\in[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]\Leftrightarrow-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x\leqslant\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0\leqslant 2x+\frac{\pi}{2}\leqslant\pi\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{2}\in[0;\pi]$

Pour tout réel α ∈ [0;π], on a $\sin\alpha \geqslant 0$.

En particulier, pour $\alpha=2x+\frac{\pi}{2}$, on a: $\sin(2x+\frac{\pi}{2})\geqslant 0$ car $2x+\frac{\pi}{2}\in[0;\pi]$

D'où $-3\sin(2x+\frac{\pi}{2})\leqslant 0$

On en déduit donc que *f '* est négatif sur $[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$

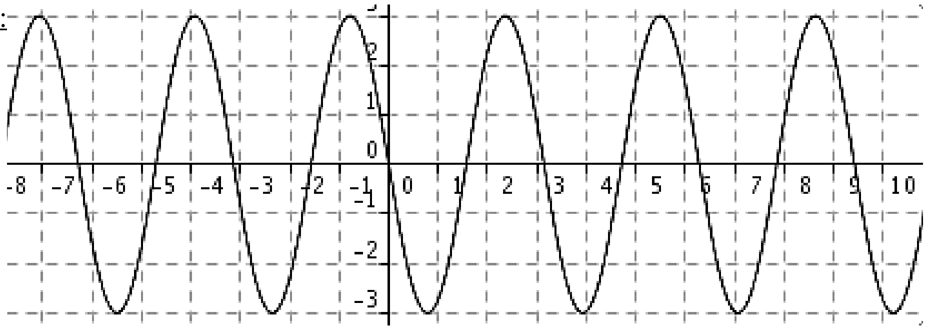
On montre de même que *f '* est positif sur $[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}]$

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$
$f'(x)$	0	–	0	+	0
$f(x)$	3	↘	-3	↗	3

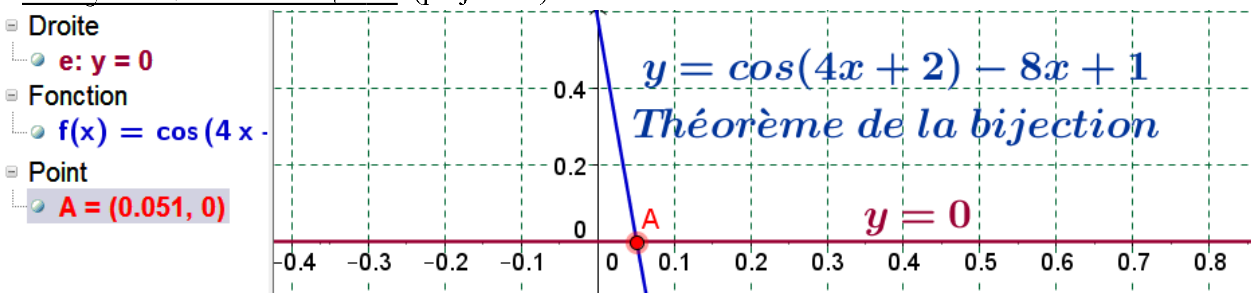
7) Donner l'équation de la tangente en *f* au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-3$ l'équation de la tangente en $\frac{\pi}{4}$ est donc y = -3

8) Courbe:



♠ Corrigé de l'exercice TRIGO 15. (projetable)



♠ Corrigé de l'exercice TRIGO 19.

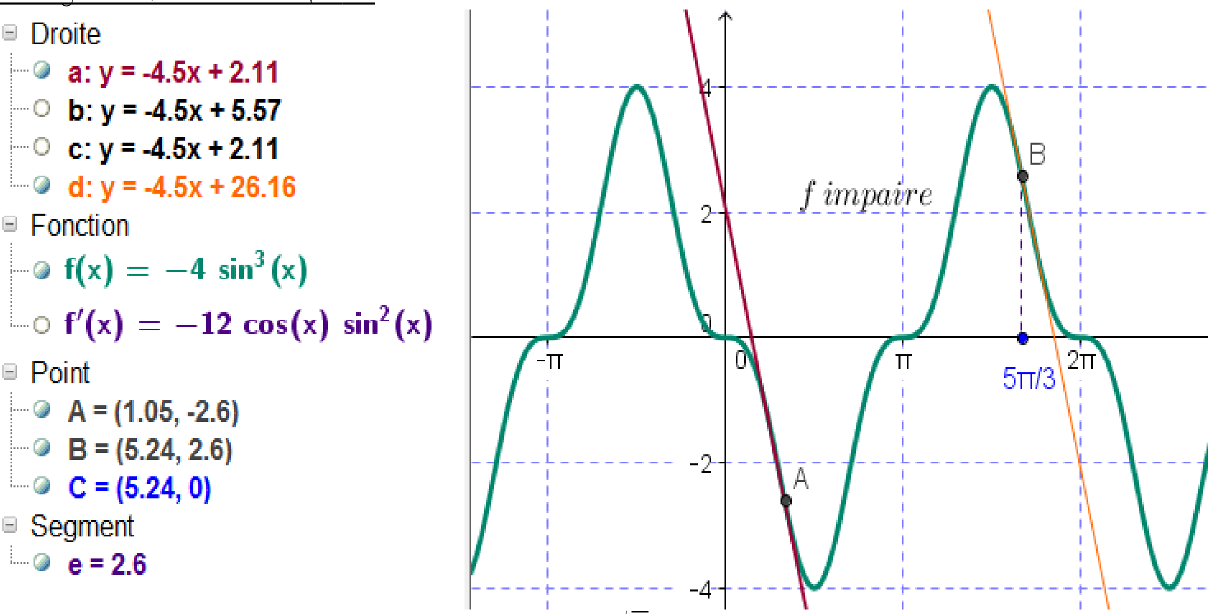
Idées pour k=1:

f *est paire et* π *périodique donc on peut réduire l'étude à* $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

$f(x)$ *s'exprime en fonction de* $\cos x$ *uniquement.* $f(x)=16y^3-20y^2+6y+1$ où $y=\cos^2 x$

$f(x)=1 \Leftrightarrow \cos^2 x=0$ ou $\cos^2 x=\frac{3}{4}$ ou $\cos^2 x=\frac{1}{2}$. *Les solutions dans* $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ *sont* $\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right\}}$

♠ Corrigé de l'exercice TRIGO 20.



Tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{3}$: $y=-\frac{9}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ *qui s'écrit aussi* $y=-\frac{9}{2}x+\frac{3}{2}(\pi-\sqrt{3})$

AP ou TD sur les fonctions trigonométriques

Savoir-faire 1. Comment vérifier l'expression d'une dérivée avec un logiciel de calcul formel ?
Avec Geogebra 4, pour obtenir l'expression de la dérivée de $f(x)=\cos(7x)$, tapez dans la ligne de saisie $f(x)=\cos(7x)$ puis tapez dans la ligne de saisie $f'(x)=Dérivée[f]$ (Avec le D majuscule et l'accent sur le é) et vous aurez l'expression de la dérivée dans la colonne de gauche (colonne « algèbre »)

Exercice TRIGO 23. Complétez le tableau suivant. Vous vérifierez l'expression trouvée pour la dérivée avec Geogebra (voir savoir-faire ci-dessous)

Fonction	**1)** $f(x)=\cos(3x)$	**2)** $g(x)=\cos\left(\frac{3}{x}\right)$	**3)** $h(x)=\sin^2 x$
Domaine de définition			
Dérivée			
Dérivée cohérente avec logiciel de calcul formel ?			
Périodique ? Si oui, meilleure période ?			

Exercice TRIGO 24. Lapin et camion [Baccalauréat Nouvelle Calédonie 2005, Exercice 4 , 5 pts]

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à . . . 30 km/h !

L'avant du camion est représenté par le segment [CC'] sur le schéma ci-dessous.
Le lapin part du point A en direction de D.
Cette direction est repérée par l'angle $\theta=\widehat{BAD}$ avec $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$ (en radians).

1) Déterminer les distances *AD* et *CD* en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances *AD* et *CD*.

2) On pose $f(\theta)=\frac{7}{2}+2\tan\theta-\frac{4}{\cos\theta}$

Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta)>0$.

3) Conclure.

Rappel : *La fonction* $x\longmapsto \tan x$ *est dérivable sur* $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ *et a pour dérivée la fonction* $x\longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}$.

http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/CorrigeNlleCaledoSnov.2005.pdf

NB: Comment masquer ou afficher les corrigés et les exercices en préparation

- Dans la version Open Office de ce document, les **corrigés** (s'ils existent) sont visibles sauf quand la variable CORR prend la valeur M (« M » pour « Masqué »). Une variable est un champ particulier (de type texte) et se crée de la même façon : « Insérer » puis « champs ». Attention ! Il faut placer la variable AVANT les sections qu'elle pilote.
- La variable CORR vaut en ce moment : CORR=V. Elle se pilote en haut du document.

- Pour créer une section masquée, sélectionner le texte à masquer, puis « insertion », puis «section » puis cliquer sur masquer : La condition s'écrit : CORR==« M » (Il faut les guillemets autour du M, un double égal et pas d'espaces).
- Pour faire réapparaître la section, changer la valeur de CORR à une autre valeur que M.
- Idem pour la variable EP (En Préparation) qui permet de masquer les exercices qui ne sont pas finis ou que j'envisage de mettre dans le DS. Elle vaut pour le moment EP=M et les sections correspondantes sont masquées quand EP=M. Elle se pilote en haut du document.
- Quand un exercice est prêt on peut supprimer la section correspondante (pour qu'il soit visible tout le temps) avec « Format »puis « Sections »
- Chers élèves, évidemment dans le pdf cela ne marche pas, c'est tout l'intérêt....