EXERCICES	Dérivation, Continuité	T.S.

Feuille d'exercices du 4 septembre 2013

○ Exercice 1. Revoir la notion de dérivée. [Source : Manuel Déclic p90]

QCM Pour chacune des affirmations suivantes, préciser **la seule** réponse correcte.

1 Si la fonction f est dérivable en a, alors :		
a. $f'(a) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$	**b.** $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 0$	**c.** $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
2 La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$, dérivable sur $]0\,;+\infty[$, est telle que, pour tout réel $x > 0$:		
a. $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$	**b.** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2}$	**c.** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$
3 La fonction $f : x \longmapsto 2x^5$, dérivable sur $\mathbb{R}$, est telle que, pour tout réel x :		
a. $f'(x) = 2x^4$	**b.** $f'(x) = 10x^4$	**c.** $f'(x) = 8x^4$
4 Si les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle I, alors leur produit uv est dérivable sur I et :		
a. $(uv)' = u'v + uv'$	**b.** $(uv)' = u'v - uv'$	**c.** $(uv)' = u'v'$
5 Soit $f : x \longmapsto x\sqrt{x}$		
a. f n'est pas définie en zéro	**b.** f est définie mais pas dérivable en zéro	**c.** f est dérivable en zéro et $f'(0) = 0$

○ Exercice 2. Activité de remise en route. [Source : A. Reiss-Barde]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x}$.

1) A l'aide de la définition, déterminer le nombre dérivé de f en 1.

2) Justifier la dérivabilité de f puis déterminer avec les formules de cours, la fonction dérivée de la fonction f et vérifier le résultat obtenu à la question 1.

3) Écrire une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

4) Que peut on dire des tangente à la courbe représentative de f aux points d'abscisses 2 et -2 ?

5) Étudier les variations de f sur son ensemble de définition et donner son tableau de variations.

○ Exercice 3. Entraînement aux dérivées et au calcul formel

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de dérivabilité et sa dérivée. Vérifiez vos résultats avec un logiciel de calcul formel : Utilisez une TI89 ou Geogebra[1] ou Xcas ou le site labomath.free.fr/wims/index.html ... etc)

1) $f(x)=\sqrt{2x+x^2}$ **2)** $f(x)=(7+2x-6x^2)^5$ **3)** $f(x)=\dfrac{12}{(3x^2-5x)^7}$

○ Exercice 4. Même exercice que le précédent avec

1) $f(x)=\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)^4$ **2)** $f(x)=\dfrac{(-6x^2+24x)^5}{(2x+1)^3}$ **3)** $f(x)=(3x+5)\sqrt{6x^2+7}$

○ Exercice 5. Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{2x-1}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Démontrez qu'il existe une droite et une seule qui est tangente à $\mathscr{C}$ et qui passe par l'origine du repère.

○ Exercice 6. Préparons le terrain...

1) Est-il possible de tracer le graphe d'une fonction f telle que $f(-2)=3$, $f(2)=4$ et l'équation $f(x)=\dfrac{13}{4}$ ait exactement une solution ? Si oui, faites-le.

2) Est-il possible de tracer le graphe d'une fonction f telle que $f(-2)=3$, $f(2)=4$ et l'équation $f(x)=\dfrac{13}{4}$ ait exactement deux solutions ? Si oui, faites-le.

3) Est-il possible de tracer le graphe d'une fonction f telle que $f(-2)=3$, $f(2)=4$ et l'équation $f(x)=\dfrac{13}{4}$ n'ait aucune solution ?

---

[1] *On peut télécharger gratuitement Geogebra gratuitement à http://www.geogebra.org/cms/fr/download/ . En plus de donner l'expression de la dérivée, Geogebra permet de visualiser la courbe représentative.*

○ Exercice 7. Un pot de peinture permet de peindre 20 m^2 . Soit $f(x)$ le nombre (entier!) de pots de peinture à acheter pour peindre x m^2 . Tracer sa courbe représentative C_f .

○ Exercice 8. Déterminer le maximum de la fonction f définie par $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$.

○ Exercice 9. Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1) Tracer $\mathscr{C}$ sur votre calculatrice ; conjecturer une expression plus simple pour *f* sous forme d'une fonction définie par morceau puis prouver votre conjecture.

2) a) Compléter sans justification : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\dots$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\dots$

b) La fonction *f* est-elle continue sur son domaine de définition ?

○ Exercice 10. Répondre par "OUI" ou "NON" aux quatre questions suivantes. Les réponses affirmatives seront justifiées par une démonstration, les autres le seront par un contre-exemple.

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si f est continue en 0, est-elle nécessairement dérivable en 0?

2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si f est dérivable en 0, est-elle nécessairement continue en 0?

3) Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0)=0$. La fonction f admet-elle nécessairement un extremum en 0?

4) Soit f une fonction continue et dérivable sur [0, 1] et admettant un maximum en 1 sur [0, 1]. La fonction f vérifie-t-elle nécessairement la condition $f'(1)=0$?

○ Exercice 11. Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{2x-1}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère. Démontrez qu'il existe une droite et une seule qui est tangente à $\mathscr{C}$ et qui passe par l'origine du repère.

○ Exercice 12. Un alpiniste commence l'ascension d'une montagne à 8 heures du matin et atteint son sommet à 8 heure du soir. Il descend le lendemain matin à 8 heures en suivant le même chemin. Montrer qu'il existe un point du chemin où l'alpiniste s'est trouvé à la même heure à la montée et à la descente.

○ Exercice 13. [Source : J. Mugnier]

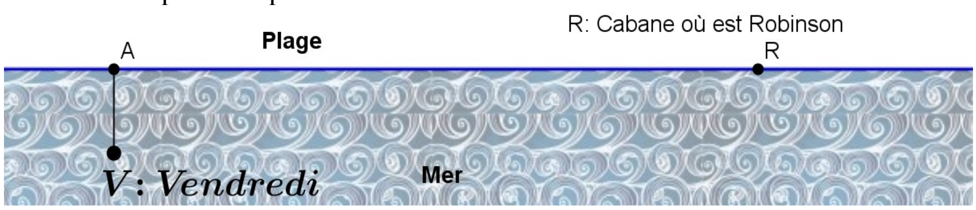
On considère une fonction *f* définie et continue sur $\mathbb{R}$ et telle que : *f* est strictement croissante sur $]-\infty;0]$ et sur $[2;+\infty[$, f est strictement décroissante sur $[0;2]$, les images de 0 et 2 par *f* sont respectivement 1 et -3. Parmi les phrases suivantes, quelles sont les assertions exactes ? (*On ne demande pas de justifier*)

a) L'équation $f(x)+1=0$ admet toujours trois solutions.
b) L'équation $f(x)+1=0$ admet au moins trois solutions.
c) L'équation $f(x)+1=0$ admet au plus trois solutions.
d) L'équation $f(x)+1=0$ admet au moins une solution positive.
e) L'équation $f(x)+1=0$ n'admet jamais exactement deux solutions.

○ Exercice 14. Quel est le nombre de solutions de l'équation $3x^4+4x^3-12x^2+4=0$? Donner ensuite un encadrement d'amplitude 10^{-2} de chacune des solutions.

○ Exercice 15. Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que l'équation $x^{2n}-x^{2n-1}=1$ admet exactement deux solutions réelles.

○ Exercice 16. Vendredi est parti nager pendant que Robinson prépare un poulet yassa dans leur cabane au bord de la plage. Au moment où Robinson lui fait signe que le déjeuner est prêt, Vendredi se trouve à 1 km du point le plus proche de la côte, noté A. On suppose la côte rectiligne et que la distance entre A et la cabane où se trouve Robinson, notée R sur la figure, est de 10 km. Vendredi souhaite regagner la cabane le plus rapidement possible. Sachant qu'il nage à 3 km/h et qu'il court à 5km/h, où Vendredi doit-il rejoindre la terre ferme pour passer à table le plus vite possible ?



Sources : Essentiellement J. Mugnier, mais aussi A. Reiss-Barde, G Costantini et divers manuels.