# Suites	T.S.

Table des matières

I. Suites : Le Best of du programme de 1S

A. Pourquoi les suites ? qu'est-ce que c'est ?

Intuitivement : Une suite numérique est une liste infinie de nombres réels.

Dans certains cas, les valeurs d'une fonction u n'ont de sens que si x est un nombre entier. Par exemple, la recette $u(x)$ d'un bar en fonction du nombre x de café vendus : Le bar ne peut pas vendre 17,3 cafés : Il en vend soit 17 soit 18. Dans ce cas, on se restreint aux valeurs entières de la variable, on note le nombre de cafés vendus n (au lieu de x) et la recette $u(n)$ (au lieu de $u(x)$) ou, avec la notation habituelle des suites, u_n . Si chaque café est vendu 1,75 €, la recette sera $u_n=1{,}75n$. [*recette* $\neq$ *bénéfice*]

Il arrive aussi que l'on s'intéresse à une certaine quantité à intervalle de temps réguliers, soit par ce qu'il ne se passe rien entre ces deux instants, soit parce qu'on n'a pas les moyen ou le besoin de savoir ce qui se passe à tout instant. Dans ces cas aussi on préfère les suites aux fonctions. Par exemple, la quantité d'argent sur un compte en banque dans le cadre d'un placement ne change qu'à chaque versement des intérêts : Si les intérêts ne sont versés qu'une fois par an, on peut noter u_n l'argent présent sur le compte au bout de n années.

Il est important de bien faire la différence entre l'***indice*** n et la valeur du nombre u_n . Par exemple, si après avoir placé de l'argent pendant 3 ans vous avez 2400 €, alors $n=3$ et $u_3=2400$. On dit que le ***terme d'indice*** 3 (ou de ***rang*** 3) a pour valeur 2400.

B. Définition et notations

♠ Exemple 1. La liste $(1,3,5,7,9,\ldots,2n+1,\ldots)$ constitue la suite des nombres impairs rangés en ordre croissant. On note les termes d'une suite avec la notation indicielle déjà vue pour les polynômes. Ainsi dans l'exemple des nombres impairs, $u_1=1$; $u_2=3$; $u_3=5$; $u_4=7$; $u_5=9\ldots$ etc. Plus généralement, u_n est le nombre défini par $u_n=2n-1$. Dans cette écriture, l'***indice n*** (le nombre écrit en bas à droite de u) sert juste à numéroter les termes de la suite. Il n'indique PAS la valeur du nombre u_n.

On peut considérer que u_1 est l'image de l'entier 1 par une fonction u de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels dans $\mathbb{R}$, que u_2 est l'image de l'entier 2 par cette même fonction et que de façon générale, u_n est l'image de l'entier n par cette fonction u.

Illustration :

Indice = Antécédent $(n \sim x)$:	1	2	3	4	…	n	…
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	
Terme correspondant à cet indice = Image $(u_n \sim f(x))$:	u_1	u_2	u_3	u_4	…	u_n	…

Définition 1. Une ***suite numérique*** est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (définie à partir d'un certain rang). Autrement dit, $u:\begin{cases}\mathbb{N} \to \mathbb{R}\\ n \mapsto u_n\end{cases}$

Une suite numérique n'est donc rien d'autre qu'une fonction dont le domaine de définition est réduit aux valeurs entières.

Notation 2. La notation $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ désigne la suite elle-même c'est-à-dire la fonction $u:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ (que l'on peut assimiler à l'*ensemble des termes* de la suite) et $\boldsymbol{u_n}$ désigne l'image de l'entier n, appelé aussi ***terme d'indice n*** de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, terme que l'on peut aussi noter $u(n)$ en utilisant la notation usuelle pour les fonctions.

Remarque 3. u_n désigne donc un seul terme. En particulier, « u_n *est croissante*» ne veut rien dire sans les parenthèses! Il faut écrire « (u_n) *est croissante*».

Remarque 4. Une suite peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang n_0 ; u_{n_0} est alors son *terme initial* et on note la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. Par exemple,

- La suite de terme général $u_n=\sqrt{n-4}$ n'est définie que pour $n \geq 4$, on la note donc $(u_n)_{n\geqslant 4}$.
- La suite de terme général $u_n=\dfrac{1}{n}$ n'est définie que pour $n \geq 1$, on la note donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

☞ *Comme pour les fonctions, on omet souvent de préciser l'ensemble de définition et, comme pour les fonctions, dans ce cas c'est à vous de le trouver.*

C. Deux façons de définir une suite :

On peut définir une suite

(1) soit en définissant son terme général par une formule explicite en fonction du rang *n* par une formule du type $\boldsymbol{u_n=f(n)}$.

♠ Exemple 2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_n=n^2$ pour tout $n\geqslant 1$ alors $u_1=1;u_2=4;u_3=9\ldots$

(2) soit par récurrence c'est-à-dire que l'on donne le premier terme et une formule permettant de calculer un terme de la suite en fonction du (des) précédent(s).

♠ Exemple 3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $\begin{cases}u_0=2\\ u_{n+1}=u_n(1-u_n)\end{cases}$. On obtient

$u_1=u_0(1-u_0)=2(1-2)=-2$; $u_2=-6$; $u_3=-42$ ….

Définition 5. Une suite pour laquelle chaque terme (sauf le ou les premiers) est défini en fonction de terme(s) précédent(s) est appelée ***suite récurrente.***

Oui, vous avez bien compris, pour calculer le 100ème terme d'une suite récurrente, il faut a priori calculer de proche en proche tous les termes précédents! (ce qui peut être long…). Heureusement, les calculatrices le font (vous savez leur demander bien sûr?)

Fiches sur l'utilisation des calculatrices : http://xmaths.free.fr/tice/calculatrice/fiches.htm

❍ Exercice 4. Déterminer le terme général d'une suite récurrente (quand c'est possible).

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=u_n+2n+1$.

1) Calculer les quatre premiers de cette suite.

2) Émettre une conjecture sur l'expression de u_n fonction de n.

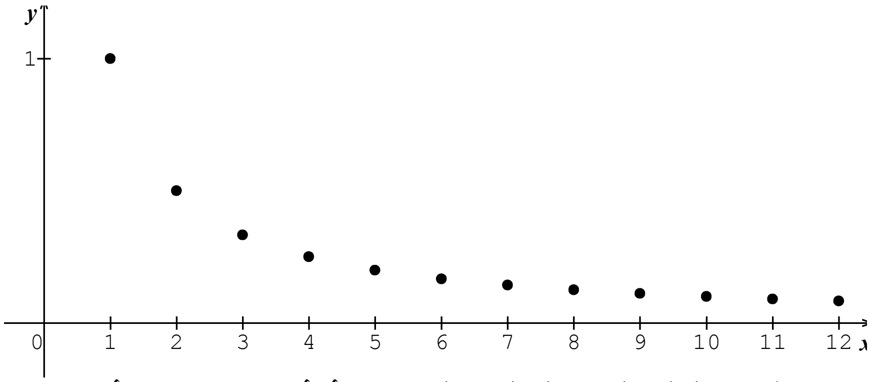
3) La démontrer.

P 6. Une méthode pour montrer que deux suites sont égales. Une suite est entièrement déterminée par son premier terme et la relation de récurrence qui permet de calculer un terme à partir du précédent. Par conséquent, si deux suites ont le même premier terme et si elles satisfont la même relation de récurrence alors elles sont égales.

D. Représentation graphique d'une suite

Définition 7. On se place dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. La représentation graphique de la suite (u_n) est l'ensemble des points de coordonnées (n, u_n). *(exactement comme pour n'importe quelle fonction)*

♠ Exemple 5. Soit la suite définie par $u_n=\frac{1}{n}$ pour $n\geqslant 1$.



Représentation avec
- n en abscisses et
- u_n en ordonnée.

Représentation semblable à celle de n'importe quelle fonction :

$n\sim x$

$u_n\sim f(x)$

A savoir obtenir avec votre calculatrice ! Fiches sur l'utilisation des calculatrices : http://xmaths.free.fr/tice/calculatrice/fiches.htm

E. Suites majorées, minorées et bornées

Définition 8. Soit une suite de nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :
- ***majorée par le nombre M*** lorsque $u_n\leqslant M$ pour tout entier naturel n ;
- ***minorée par le nombre n*** lorsque $u_n\geqslant m$ pour tout entier naturel n ;
- ***bornée*** si elle est à la fois majorée et minorée.

♠ Exemple 6. Soit la suite définie par $u_n=\frac{1}{n}$ pour $n\geqslant 1$. Cette suite est minorée par 0 puisque mais $\forall n\geqslant 1$, $u_n\geqslant 0$ aussi par -1, $-\sqrt{3}$ …etc puisque $\forall n\geqslant 1$, $u_n\geqslant -1$ et $\forall n\geqslant 1$, $u_n\geqslant -\sqrt{3}$: Les nombres 0, -1 et $-\sqrt{3}$ sont tous les trois des minorant de (u_n). De même, cette suite est majorée par 1 mais ce majorant n'est pas unique puisque tous les nombres plus grands que 1 sont aussi des majorants.

F. Sens de variation d'une suite

Définition 9. Soit une suite de nombres réels. On dit que la suite est :
- ***croissante*** à partir du rang n_0 lorsque $u_{n+1}\geqslant u_n$ pour tout entier $n\geqslant n_0$;
- ***strictement croissante*** à partir du rang n_0 lorsque $u_{n+1}>u_n$ pour tout entier $n\geqslant n_0$;
- ***décroissante*** à partir du rang n_0 lorsque $u_{n+1}\leqslant u_n$ pour tout entier $n\geqslant n_0$;
- ***strictement décroissante*** à partir du rang n_0 lorsque $u_{n+1}<u_n$ pour tout entier $n\geqslant n_0$;
- ***monotone*** à partir du rang n_0 si elle est croissante ou décroissante à partir du rang n_0 ;
- ***stationnaire*** à partir du rang n_0 lorsque $u_{n+1}=u_n$ pour tout entier $n\geqslant n_0$ (c'est-à-dire dire que tous les termes sont égaux à partir d'un certain rang).
- ***constante*** si tous ses termes sont égaux.

Exercice 7. La suite de terme général $u_n=\cos(2n\pi)$ est . . . .

La suite de terme général $v_n=3n-9$ est . . . .

Remarque : On peut deviner le sens de variation d'une suite grâce à sa représentation graphique ou son tableau de valeurs donné par la calculatrice. (Vous savez le faire, bien sûr ?) Une fois le résultat deviné, il faut le démontrer, d'où :

Méthode 10. Comment démontrer qu'une suite est croissante ou décroissante ?

■ Méthode la plus générale : On calcule, pour tout indice n *[On garde la lettre n dans le calcul]*, la différence de deux termes consécutifs c'est à dire $u_{n+1}-u_n$. Si on obtient une quantité positive pour tout entier n [*il faut donc garder n dans les calculs, on ne peut pas le remplacer par une valeur*], alors la suite (u_n) est croissante. Si on obtient une quantité négative, alors la suite (u_n) est décroissante. Si on obtient une quantité de signe variable alors la suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

Dans certains cas particuliers, on peut avoir recours à d'autres méthodes:

■ Si $u_n=f(n)$, on peut utiliser le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$. En effet. Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. alors (u_n) est croissante et si f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. alors (u_n) est décroissante (réciproques fausses).

■ Si u_n a un signe constant, c'est à dire si tous les termes sont positifs ou si tous les termes sont négatifs, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

G. Les suites arithmétiques

1. Définition et formule explicite

Définition 11. Une suite est dite ***arithmétique*** si l'on passe de chaque terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre *r*, autrement dit si $u_{n+1}=u_n+r$ pour tout entier naturel *n ;*
r est alors appelé ***raison de la suite***.

$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \ldots$

♠ Exemples 8.

1) *La suite des nombres entiers est une suite arithmétique de raison r = 1.*
2) *La suite des nombres pairs est une suite arithmétique de raison r = 2.*
3) *La suite des multiples de 7 est une suite arithmétique de raison r = 7.*
4) *Si un loyer augmente de 50 € chaque année, alors la suite qui donne le loyer l'année n est une suite arithmétique de raison 50 €.*

P12 ▪ Caractérisation des suites arithmétiques par leur formule explicite

• Toute suite définie par une relation du type $u_n = an + b$ est arithmétique de raison a, avec $b=u_0$ si la suite est définie à partir de l'indice 0.

• Réciproquement, toute suite arithmétique peut s'écrire $u_n = an + b$ où $a = r$ est la raison de la suite arithmétique, et $b=u_0$ si la suite est définie à partir de l'indice 0.

↳ Une écriture du type $\boldsymbol{u_n = an + b}$ caractérise donc les suites arithmétiques (la raison est a).

P 13. Méthodes pour montrer qu'une suite est arithmétique.

■ On utilise la définition, c'est-à-dire que l'on écrit u_{n+1} sous la forme $u_{n+1}=u_n+r$, où r est un nombre qui ne dépend pas de n.

■ *Variante* : On calcule $u_{n+1}-u_n$ pour tout indice n.

▪ Si on obtient une quantité constante *(= qui ne dépend pas de n)* r alors la suite est arithmétique de raison r.

▪ Si par contre la quantité $u_{n+1}=u_n$ dépend de n, alors la suite n'est PAS arithmétique.

■ On peut aussi utilise la caractérisation vue précédemment: La suite (u_n) est arithmétique si et seulement si son terme général peut s'écrire $u_n=an+b$ et dans ce cas, la raison est a.

♠ Exemples 9.

1) $u_n=3n-2$

Première méthode : En calculant les premiers termes de la suite on peut supposer qu'elle sera arithmétique. Montrons le : $u_{n+1}-u_n=3(n+1)-2-(3n-2)=3$, qui ne dépend pas de *n*. La suite est donc arithmétique de raison *r* = 3 et de premier terme $u_0=-2$.

Autre méthode : $u_n=3n-2$ donc u_n est de la forme $u_n=an+b$; d'après la caractérisation P12, elle est donc arithmétique de raison $a=3$.

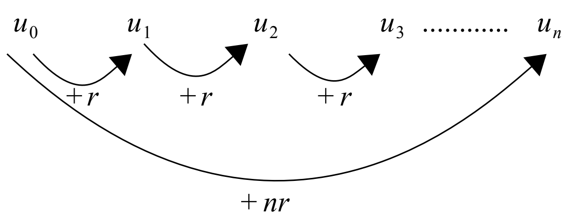
2) $u_n=n^2+1$

$u_0=1;u_1=2;u_2=5$ donc $u_1-u_0=1\neq 3=u_2-u_1$. La suite n'est donc pas arithmétique puisque la quantité $u_{n+1}-u_n$ n'est pas constante. *[Rédaction qui vous sera utile ! À retenir....]*

P14 ▪ Comment calculer un terme quelconque d'une suite arithmétique ?

On utilise l'une des relations suivantes

- $u_n=u_0+nr$ pour tout *n* entier naturel ;
- $u_n=u_1+(n-1)r$ pour tout *n* entier naturel ;
- $u_n=u_p+(n-p)r$ pour tout *n* et *p* de ℕ .



Pour retrouver ces formules : La première doit être vérifiée pour *n = 0* (on doit évidemment avoir $u_0=u_0$!), la deuxième doit être vérifiée pour *n* = 1 (on doit avoir $u_1 = u_1$) et la troisième doit être vérifiée pour *n = p* (on doit avoir $u_p=u_p$). Bien sûr, les deux premières sont un cas particulier de la troisième.

♠ Exemples 10.

Soit (u_n) une suite arithmétique. Calculer u_{26} dans les deux cas suivants :

1) $u_o=6$ et $r=5$ $\qquad u_{26}=u_0+26r=6+26\times 5=136$

2) $u_{10}=3$ et $r=-2$ $\qquad u_{26}=u_{10}+(26-10)r=3+16(-2)=-29$

2. Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

P15 ▪ Comment calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

On utilise la relation suivante : $\boldsymbol{S=(Nombre\ de\ termes)\times\frac{(Premier\ terme+Dernier\ terme)}{2}}$ ce que l'on peut écrire sous forme plus condensée : $S=N\times\frac{(P+D)}{2}$ où $\begin{cases}\text{P est le premier terme de la somme}\\ \text{D est le dernier terme de la somme}\\ \text{N est le nombre de termes de la somme.}\end{cases}$

Remarque : Cette formule n'est valable que si la suite est arithmétique.

Pour appliquer cette formule nous aurons besoin de savoir compter le nombre de termes d'une somme de termes consécutifs . On utilise :

P16 ▪ Le nombre de termes d'une somme de termes consécutifs
= *« indice du dernier terme » - « indice du premier terme »* **+1**

♠ Exemple 11. La somme $u_{13}+u_{14}+u_{15}+\ldots+u_{45}$ comporte donc $45-13+1$ termes.

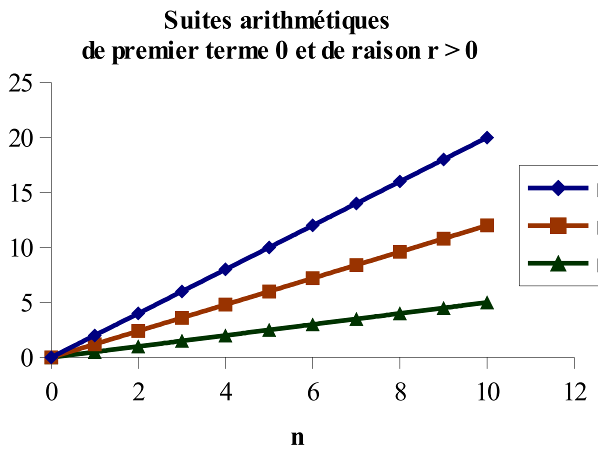
P17 ▪ Un cas particulier à connaître:

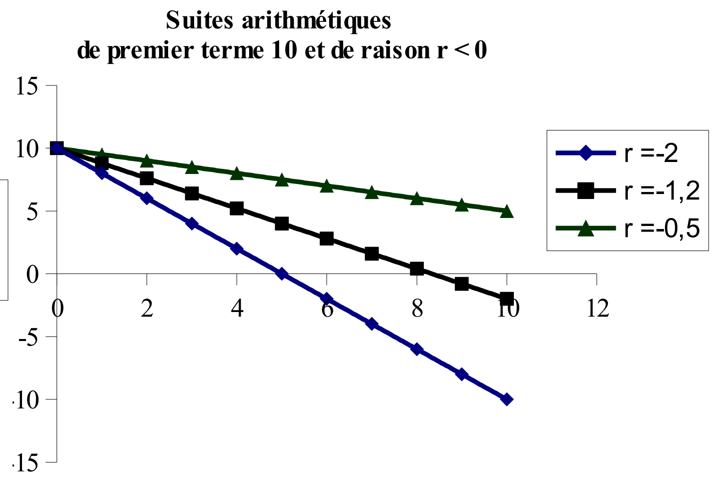
La somme des *n* premiers entiers = $1+2+3+4+5+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

3. Représentation d'une suite arithmétique

Une suite arithmétique est représentée dans le plan (avec *n* en abscisses et u_n en ordonnées) par des points alignés sur une droite.

Si la suite arithmétique a pour raison *r* et pour premier terme u_0 , alors $u_n=u_0+nr$ et les points de coordonnées (n,u_n) sont alignés sur la droite d'équation $y=u_0+nr$.





4. Sens de variation d'une suite arithmétique

P18 ▪ Sens de variation d'une suite arithmétique :
Soit u une suite arithmétique de raison r :
- Si $r > 0$ alors u est strictement croissante,
- Si $r = 0$ alors la suite u est constante,
- Si $r < 0$ alors la suite u est strictement décroissante.

H. Suites géométriques

1. Définition et formule explicite

Définition 19. Une suite est dite ***géométrique*** si l'on passe de chaque terme au suivant en multipliant toujours le même nombre q, c'est à dire si $u_{n+1}=q u_n$ pour tout entier naturel n.
q est appelé ***raison de la suite***.

$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \ldots$

Exercice 12. À faire à l'ardoise

1) Si la population d'une ville augmente de 3% chaque année, alors la suite qui donne population de la ville l'année n est une suite géométrique de raison $q=1{,}03$.
2) Si la population d'une ville augmente de 230 personnes chaque année, alors la suite qui donne population de la ville l'année n est une suite arithmétique de raison $r=230$.
3) Si la population d'un village diminue de 2% chaque année, alors la suite qui donne population du village l'année n est une suite géométrique de raison $q=0{,}98$.

P20 ▪ Caractérisation des suites géométriques par leur formule explicite

• Toute suite définie par une relation du type $u_n=\lambda q^n$ est géométrique de raison q.

• Réciproquement, toute suite géométrique de raison q est de la forme $u_n=\lambda q^n$, avec $\lambda=u_0$ si la suite est définie à partir de l'indice 0.

↳ Une écriture du type $u_n=\lambda q^n$ caractérise donc les suites géométriques.

P21 ▪ Diverses méthodes pour montrer qu'une suite est géométrique

■ On utilise directement la définition, c'est-à-dire que l'on écrit u_{n+1} sous la forme $u_{n+1}=q u_n$

■ *Variante* :Après s'être assuré que $u_n \neq 0$ pour tout entier n, on calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

▪ Si obtient une quantité constante (= *qui ne dépend PAS de n)* q alors la suite est géométrique de raison q.

▪ Si obtient une quantité qui dépend de n alors la suite n'est PAS géométrique.

■ On peut aussi utilise la caractérisation vue précédemment: (u_n) est géométrique si et seulement si son terme général peut s'écrire $u_n=\lambda q^n$ et dans ce cas, q est la raison de la suite.

♠ Exemples 13. Reconnaître une suite géométrique. Les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies respectivement par $u_n=\dfrac{1{,}01^n}{5}$ et $v_n=n^2$ sont-elles géométriques ?

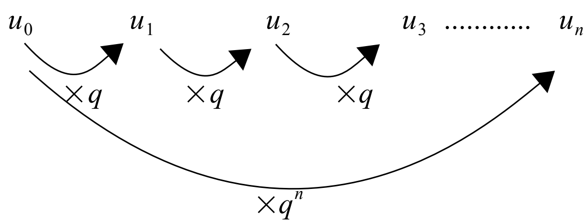
1) $u_n=\dfrac{1{,}01^n}{5}$ est de la forme $u_n=\lambda q^n$ avec $\lambda=\dfrac{1}{5}$ et $q=1{,}01$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $q=1{,}01$ et de 1er terme $u_0=\dfrac{1}{5}$.

2) $v_n=n^2$ donc $v_1=1;v_2=4;v_3=9$. On a $\dfrac{v_2}{v_1}=4\neq\dfrac{9}{4}=\dfrac{v_3}{v_2}$, donc la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas géométrique puisque la quantité $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ n'est pas constante. *[Rédaction qui vous sera utile ! À retenir….]*

P22 ▪ **Comment calculer un terme quelconque d'une suite géométrique ?**

On utilise l'une des relations suivantes

- $u_n=u_0\times q^n$ pour tout n entier naturel ;
- $\boldsymbol{u_n=u_1\times q^{n-1}}$ pour tout n entier naturel ;
- $u_n=u_p\times q^{n-p}$ pour tous entiers n et p.



♠ Exemples 14. Soit une suite géométrique. Calculer u_7 dans les deux cas suivants :

1) $u_0=\dfrac{1}{4}$ et $q=2$ $\qquad u_7=q^7u_0=2^7\times\dfrac{1}{4}=2^{7-2}=32.$

2) $u_4=81$ et $q=\dfrac{1}{3}$ $\qquad u_7=q^3u_4=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\times 81=\dfrac{1}{3^3}\times 3^4=3.$

2. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

P23 ▪ **Comment calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique ?**

On utilise la relation suivante :

• Si $q\neq 1$ on a $1+q+q^2+q^3+q^4+\ldots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ce qui permet de démontrer la formule plus générale $\boldsymbol{S=\dfrac{Premier\ terme-(Dernier\ terme\times raison)}{1-raison}=\dfrac{P-(D\times q)}{1-q}}$

où $\begin{cases}\text{P est le premier terme de la somme}\\ \text{q est la raison}\\ \text{N est le nombre de termes de la somme.}\end{cases}$

• Si $q=1$ $\quad S=NP$ $\qquad$ *(Formule évidente)*

♠ Exemples 15. Calculer $S=1+2+4+8+16+\ldots+4096$.

Nous avons affaire à la somme de termes d'une suite géométrique de raison $q=2$ et dont le 1er terme est égal à 1 :

$S=\dfrac{P-D\times q}{1-q}=\dfrac{1-4096\times 2}{1-2}=8191$.

Remarques :

1) Ces formules ne sont valables que si la suite est géométrique.

2) Dans la formule (2) : $S=\dfrac{Premier\ terme-Dernier\ terme\times raison}{1-raison}$, au numérateur, la raison ne multiplie QUE le dernier terme, et PAS la différence du premier et du dernier terme (sinon on aurait mis des parenthèses autour de « *premier terme - dernier terme* »).

○ Exercice 16. Soit (u_n) la suite définie par $u_n=3^{2n+2}-2\times 9^n$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique puis calculer $S_p=u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots+p$.

3. Représentation graphique d'une suite géométrique et sens de variation d'une suite géométrique

Voir les graphiques page 13.

■ *Étape 1 : Sens de variation de la suite $n \mapsto q^n$, suivant les valeurs de q.*

P24. Sens de variation d'une suite géométrique :
Soit une suite définie par : $u_n = q^n$
- Si $q > 1$ alors $n \mapsto q^n$ est strictement croissante,
- Si $q = 1$ alors $n \mapsto q^n$ est constante,
- Si $0 < q < 1$ alors $n \mapsto q^n$ est strictement décroissante,
- Si $q < 0$ alors $n \mapsto q^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

■ *Étape 2, Cas général : Sens de variation de n'importe quelle suite géométrique.*

Toute suite géométrique s'écrit $u_n = \lambda q^n$. Le théorème précédent donne le sens de variation de $n \mapsto q^n$. Il ne reste plus qu'à multiplier par λ pour obtenir notre suite. Si $\lambda > 0$, les suites $n \mapsto q^n$ et $n \mapsto \lambda q^n$ ont le même sens de variation et si $\lambda < 0$, $n \mapsto q^n$ et $n \mapsto \lambda q^n$ ont des sens de variation opposés.

II. Le raisonnement par récurrence

Source pour pour ce paragraphe : Le cours de Pierre Lux. Merci à lui !

A. Étude d'un exemple

En classe, démontrer la formule qui donne la somme des n premiers carrés:

$\forall n \geqslant 1,\ 1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *et leur laisser l'exemple ci-dessous à lire à la maison.*

On considère la proposition[1] *P(n)* dépendant d'un entier n : « $10^n - (-1)^n$ *est un multiple de 11.* »
(On rappelle qu'un nombre est multiple de 11 lorsqu'il s'écrit sous la forme $11 \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.)
Vérifions que cette proposition est vraie pour les entiers n = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 :

Pour $n = 0$: $10^0 - (-1)^0 = 1 - 1 = 0 = 11 \times 0$

Pour $n = 1$: $10^1 - (-1)^1 = 10 - (-1) = 10 + 1 = 11 = 11 \times 1$

Pour $n = 2$: $10^2 - (-1)^2 = 100 - 1 = 99 = 11 \times 9$

Pour $n = 3$: $10^3 - (-1)^3 = 1\,000 - (-1) = 1\,000 + 1 = 1\,001 = 11 \times 91$

Pour $n = 4$: $10^4 - (-1)^4 = 10\,000 - 1 = 9999 = 11 \times 909$

On pourrait continuer ainsi les vérifications, mais quel que soit le nombre de vérifications effectuées, on ne peut pas affirmer que cette proposition est vraie pour tout entier naturel n.

Pour justifier que cette proposition est vraie pour tout entier naturel n, démontrons le résultat suivant :
Si la proposition est vraie pour le rang n, alors elle est vraie pour le rang suivant n + 1.

Pour cela, supposons que la proposition est vraie pour un certain rang n (n étant un entier naturel fixé).
Alors pour cet entier naturel n, on a :
$10^n - (-1)^n$ un multiple de 11 c'est-à-dire $10^n - (-1)^n = 11k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
[n est fixé mais sa valeur est arbitraire, on ne peut donc pas le remplacer par une valeur. On doit garder n]
On veut alors démontrer que la proposition est vraie pour n + 1 c'est-à-dire que $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 11 \times k'$ pour un certain $k' \in \mathbb{Z}$:
Puisque $10^n - (-1)^n = 11k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on peut écrire : $10^n = 11k + (-1)^n$.
Or

[1] *Une **proposition** est une affirmation peut être vraie ou fausse. En particulier pour une proposition qui dépend de n, elle pourrait être vraie pour certaines valeurs de n et fausse pour d'autres.*

$10^n = 11k + (-1)^n \overset{(i)}{\Leftrightarrow} 10 \times 10^n = 10[11k + (-1)^n] \Leftrightarrow 10^{n+1} = 110k + 10 \times (-1)^n$
$\overset{(ii)}{\Leftrightarrow} 10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 110k + 10 \times (-1)^n - (-1)^{n+1} \overset{(iii)}{=} 110k + (-1)^n [10 - (-1)^1] = 110k + (-1)^n \times 11$
$\Leftrightarrow 10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 11[10k + (-1)^n] = 11k'$ ou` $k' = 10k + (-1)^n$.

Explications : *(i) En multipliant les deux membres par 10 ;*
(ii) En soustrayant $(-1)^{n+1}$ aux deux membres ;
(iii) En factorisant $(-1)^n$.

k étant un entier, le nombre $k' = 10k + (-1)^n$ est aussi un entier.

On a donc démontré que : $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 11k'$, $k' \in \mathbb{Z}$.

On a donc démontré le caractère ***héréditaire*** de la proposition :
Si la proposition est vraie pour un entier n, alors elle est vraie pour l'entier suivant $n+1$.

On peut alors observer que : puisque la proposition est vraie pour 0, elle est vraie pour 1 ; puisqu'elle est vraie pour 1, elle est vraie pour 2 ; puisqu'elle est vraie pour 2, elle est vraie pour 3 .....

Il apparaît alors "clairement" que la proposition est vraie pour tous les entiers n de $\mathbb{N}$.

En assimilant l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels à une échelle sur laquelle on voudrait monter, le principe du raisonnement qui vient d'être fait est le suivant :
- si on sait monter sur le premier barreau de l'échelle [Initialisation]
- et si l'on sait passer d'un barreau au barreau suivant, [Hérédité]
- alors on peut atteindre tous les barreaux de l'échelle. [Conclusion]

Le type de raisonnement ainsi effectué est appelé ***raisonnement par récurrence***. Il est basé sur la propriété suivante :

B. Propriété de récurrence

Propriété 25. Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier n et n_0 un entier fixé.
- Si $P(n_0)$ est vraie, [Initialisation]
- et si pour tout entier $n \geq n_0$: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ [Hérédité]
- alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$. [Conclusion]

Remarque : Cette propriété, que l'on ne démontre pas et qui semble tenir du "bon sens" est en fait un axiome des mathématiques, c'est-à-dire un énoncé posé à priori qui sera une des bases de la théorie mathématique.
En géométrie un axiome célèbre est l'axiome d'Euclide : "Par un point donné il passe une parallèle et une seule à une droite donnée".

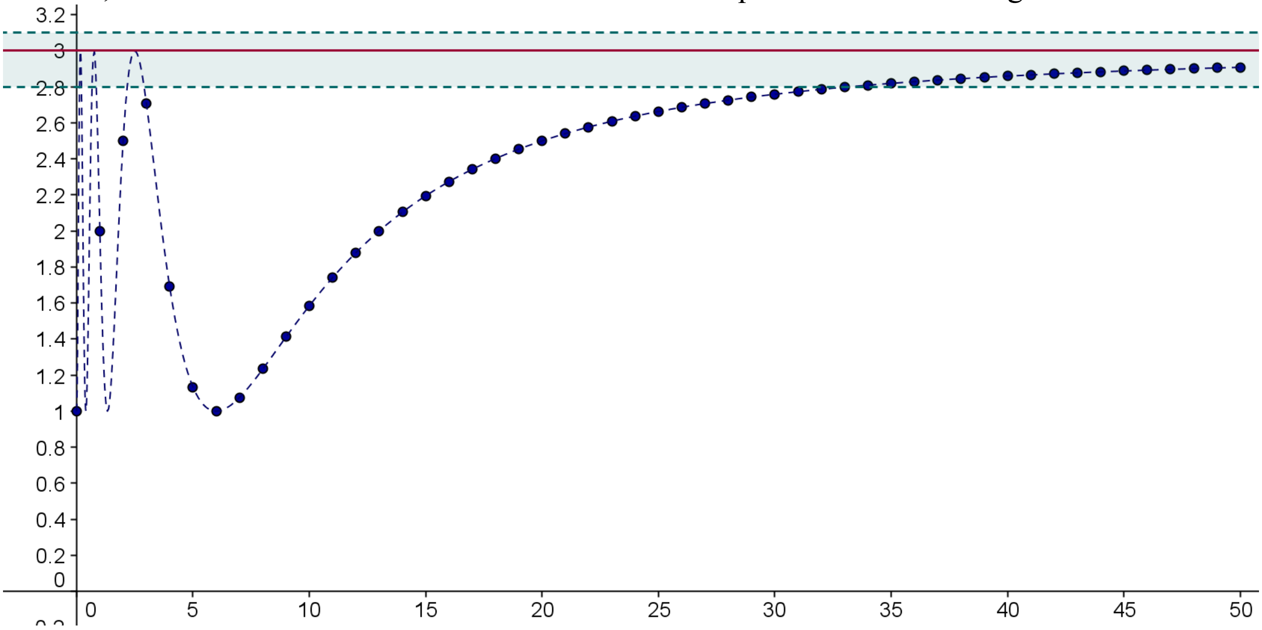
Pratique : Un exemple (utile pour la suite!) de démonstration par récurrence.
Exercice 17. Démontrons par récurrence que si $a > 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

III. Limite d'une suite

A. Suite convergente

■ *Un graphique permet de se faire une idée intuitive de la notion de limite* :

♠ Exemple 18. Les 50 premiers termes de la suite de terme général u_n sont représentés ci-dessous, avec u_n en abscisse et n en ordonnée. On dit que cette suite converge vers 3.



A partir d'un certains rang, tous les points sont dans une bande centrée sur la limite (qui est 3 dans cet exemple) de largeur aussi petite que l'on veut : Sur ce dessin, dans la bande (verte) entre les droites d'équation $y=2{,}8$ et $y=3{,}1$.

Définition 26. On dit qu'une suite *admet une limite* ℓ, ou ***converge vers*** ℓ, lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout intervalle ouvert $]a\,,\,b[$ contenant le nombre, ℓ on peut trouver un indice n_0 tel que pour tout $n\geqslant n_0$, on a $\ell\in]a\,,b[$.

◯ Exercice 19. Complétez : Sur le dessin ci-dessus, $\ell=3$; $]a\,,\,b[$ =. . . . . et $n_0=$ . . . . . . convient. Une autre valeur possible pour n_0 est . . . . . .

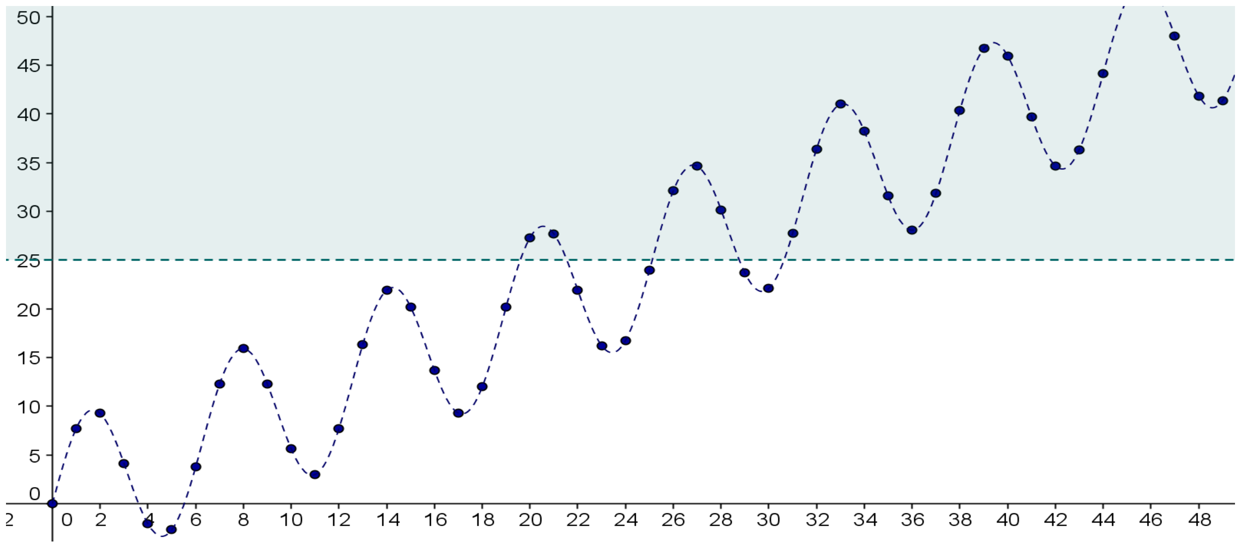
Propriété 27. Si une suite (u_n) converge vers ℓ, ce nombre ℓ est unique. On l'appelle la ***limite de la suite***. On note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\ell$.

B. Suites divergentes

Définition 28. Une suite est dite ***divergente*** si elle n'est pas convergente.
Il existe deux types de suites divergentes :

- les suites qui ont une limite infinie : $-\infty$ ou $+\infty$;
- les suites qui n'ont pas de limite *(ni finie, ni infinie, comme $(-1)^n$ par exemple).*

♠ Exemple. Les premiers termes de la suite de terme général $u_n=n+8\sin n$ sont représentés ci-dessous, avec u_n en abscisse et n en ordonnée.
(Les points représentent les termes de la suite, la courbe en pointillés sert juste à mieux visualiser l'ordre dans les termes apparaissent)



Définition 29. Suites qui tendent vers l'infini :
On dit que la suite u tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors $\lim_{n\to\infty} u_n=+\infty$.

Autrement dit, pour tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, on peut trouver un indice n_0 tel que pour tout $n\geqslant n_0$, on a $\ell\in]a,b[$.

◯ Exercice 20. Complétez : Sur le dessin ci-dessus, $A=25$ et en notant n_0 un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans $]A;+\infty[$, on voit que $n_0=$ . . . . . . convient. Une autre valeur possible pour n_0 est . . . . . .

Remarque : on a une définition similaire pour une suite ayant comme limite $-\infty$.

♠ Exemple de suites divergente n'ayant pas de limite du tout.
Soit la suite définie par son terme général : $w_n=(-1)^n$. $(-1)^n=1$ pour n pair et $(-1)^n=-1$ pour n impair donc les termes de la suite (w_n) vont alterner entre -1 et 1.
Cette suite n'a pas de limite.

C. Suites de référence : Puissances positives et négatives de n

Propriété 30. Les suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$ et plus généralement $\frac{1}{n^p}$ avec $p>0$ ainsi que $\frac{1}{\sqrt{n}}$ convergent vers 0.

♠ Exemple 21. $v_n=\frac{1}{n^6}$. On a $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^6}=0$.

Propriété 31. Les suites de terme général n , n^2 , n^3 et plus généralement n^p avec $p>0$ ainsi que $\sqrt{n}$ tendent vers $+\infty$.

♠ Exemple 22. $v_n=n^7$, on a $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

D. Opérations algébriques sur les limites et formes indéterminées

1. Limite d'une somme

Si u a pour limite	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si v a pour limite	ℓ'	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $u+v$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	☝ Forme indéterminée

Définition 32. Dire qu'une limite est une ***forme indéterminée*** signifie qu'il est possible que la limite soit finie ou infinie ou même qu'elle n'existe pas ! On ne peut pas le savoir avant de transformer l'expression pour lever l'indétermination en factorisant, simplifiant…etc. *[Indéterminée ≠ Indéterminable !]*

2. Limite d'un produit

Si u a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell = 0$
et si v a pour limite	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $u \times v$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$ *On le détermine par la règle des signes*	$+\infty$ ou $-\infty$ *On le détermine par la règle des signes*	Forme indéterminée

3. Limite d'un inverse

Si u a pour limite	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$ par valeurs supérieures	$\ell = 0$ par valeurs inférieures	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{1}{u}$ a pour limite	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$ *(par la règle des signes)*	$-\infty$ *(par la règle des signes)*	0

4. Limite d'un quotient

$\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$ donc on obtient les limites de ce type en combinant les règles sur les inverses et celle sur les produits.

5. Bilan : Liste des formes indéterminées

P 33. Liste des formes indéterminées : $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$, 0^0 et 1^∞ .

Attention aux notations : « $0 \times \infty$ *est une forme indéterminée* » signifie que si la première suite tend vers 0 et la deuxième vers $+\infty$, on ne peut pas connaître directement la limite de leur produit. Bien sûr si la première suite est égale à 0 la limite vaut 0.

Morale de l'histoire : En regardant les tableaux, on voit que les limites sont ce qu'on attend intuitivement sauf quand il y a un problème càd une forme indéterminée. Bref, il suffit de connaître la liste des formes indéterminées (pas besoin de retenir ces tableaux) et de faire preuve de bon sens quand il n'y pas de forme indéterminée.

IV. Limites et comparaison

P 34. Limite et ordre: Le passage à la limite respecte l'ordre mais peut élargir les inégalités :
Soient u et v des suites ayant une limite (finie ou non) et soit n_0 un entier naturel.

(1) Si $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

(2) Si $\forall n \geqslant n_0,\ u_n < v_n$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Remarque : Cette propriété n'est utilisable que si on sait déjà que les suites ont une limite. Elle permet alors de comparer des limites (mais pas de prouver leur existence).

■ Les théorèmes:

P 35. Théorèmes des gendarmes [admis]
Soient u , v et w des suites et soit n_0 un entier naturel.
Si $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

- *On peut traduire cette propriété par « Une suite encadrée par deux suites de même limite converge vers cette limite commune. »*

- *« Théorème des gendarmes » car la suite v est coincée entre les « gendarmes » u et w et elle est donc bien obligée d'aller où ils l'emmènent.*

■ Dans le même genre, pour des limites infinies : Deux **théorèmes de comparaison** :

Propriété 36. (▣ **ROC exigible)** Théorème de comparaison 1 = Théorème de minoration

Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

- *On peut traduire cette propriété par « Une suite supérieure à une suite qui tend vers* $+\infty$ *tend aussi vers* $+\infty$.
- *« Théorème de minoration » car la suite v dont on cherche la limite est minorée (par u).*

Propriété 37. Théorème de comparaison 2 = Théorème de majoration

Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

- *On peut traduire cette propriété par « Une suite inférieure à une suite qui tend vers* $-\infty$ *tend aussi vers* $-\infty$.
- *« Théorème de majoration » car la suite u dont on cherche la limite est majorée (par v).*

V. Cas particuliers de convergence : Les suites monotones et les suites géométriques

A. Suites monotones

Rappel : Une suite (ou une fonction) est dite ***monotone*** si elle est soit croissante soit décroissante.

P38 ▪ (▣ **ROC exigible) Majoration par leur limite des suites croissantes et convergentes**

Si une suite est croissante et convergente alors elle est majorée par sa limite.

Théorèmes de convergence monotone : Convergence des suites croissantes majorées et décroissantes minorées

P39 ▪ Si une suite est croissante et majorée alors elle est convergente.

P40 ▪ Si une suite est décroissante et minorée alors elle est convergente.

Remarque : Ce théorème ne permet pas de trouver la valeur de la limite (elle n'est pas forcément égale au majorant ou au minorant) mais il garantit son existence.

P41 ▪ (▣ **ROC exigible) Suites croissantes non majorées**

Si une suite est croissante et NON majorée alors elle tend vers $+\infty$.

B. Cas des limites de suites géométriques

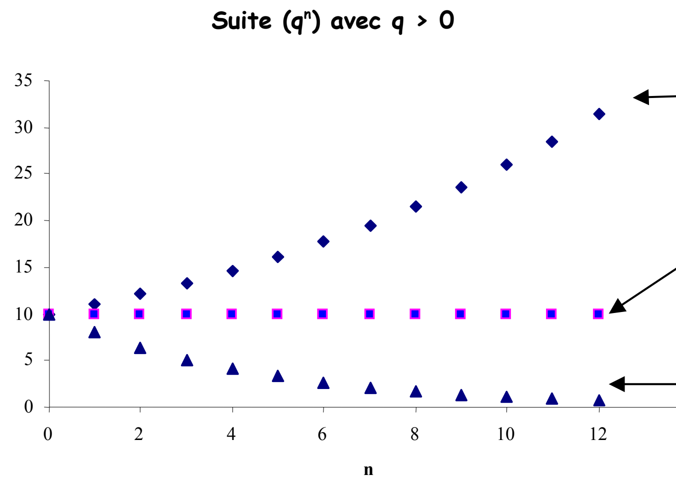
Propriété 42. Soit une suite géométrique de terme général (q^n)

Condition sur q	*limite?*	*Exemple*
Si $q \leqslant -1$	alors (q^n) n'a pas de limite	$u_n = -1{,}3^n$
Si $-1 < q < 1$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}4^n = 0$
Si $q = 1$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$	La suite est constante et vaut 1.
Si $q > 1$	alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ (▣ **ROC exigible)**	$\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}001^n = +\infty$

Résultats à rapprocher des représentations graphiques ci-dessous.

Sur tous ces graphiques $u_0 = 10$. On obtiendrait des graphiques très similaires avec d'autres valeurs positives de u_0 mais par contre les sens de variations seraient inversés pour des valeurs négatives de u_0.

■ q>0



q >1

- *Variations* : La suite (q^n) est croissante.
- *Limite* : La suite (q^n) a pour limite $+\infty$.

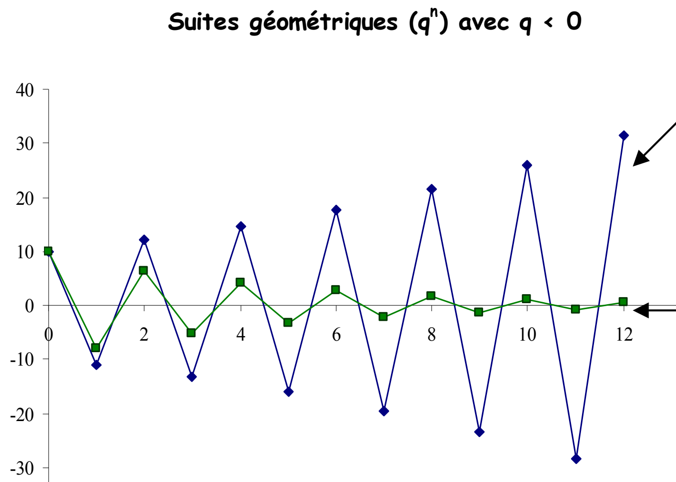
q = 1: La suite (q^n) est constante et égale à 1. Elle a donc pour limite 1.

0 < q < 1:

- *Variations* : La suite (q^n) est décroissante.
- *Limite* : La suite (q^n) a pour limite 0.

n en abscisse et u_n en ordonnée

■ q<0



q <0 et |q| >1 :

- *Variations* : La suite (q^n) n'est pas monotone.
- *Limite* : La suite (q^n) n'a pas de limite.

q <0 et |q| <1 :

- *Variations* : La suite (q^n) n'est pas monotone.
- *Limite* : La suite (q^n) a pour limite 0.

-40 *n en abscisse et u_n en ordonnée. Les traits entre deux points servent juste à mieux visualiser les suites.*

♠ Exemples.

1) $u_n = 5^n$, comme $5 > 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2) $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{3^n}$. Quelle est la limite de S_n ?

Solution : C'est une somme de termes consécutifs de la suite de terme général $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ *qui est une suite géométrique.*

$S_n = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ *donc* $S_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$. *Comme* $-1 < \frac{1}{3} < 1$, *on a*

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ *donc* $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{3}{2}(1 - 0) = \frac{3}{2}$.

VI. Limites possibles pour une suite récurrente

Il arrive que grâce au théorème de convergence monotone on arrive à prouver qu'une suite est convergente sans connaître sa limite. Pour la déterminer, on utilise souvent :

P43 ▪ Si une suite définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ est convergente vers une limite ℓ et si f est continue en ℓ, alors ℓ vérifie $\ell=f(\ell)$.

Cette propriété sert aussi à déterminer à priori les valeurs possibles pour la limite d'une suite.

♠ Exemple. La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1}=(u_n)^2+u_n+2 \\ u_0=-\sqrt{7} \end{cases}$ est-elle convergente?

Solution: [raisonnement par l'absurde] Si la suite était convergente, comme la fonction $x\mapsto x^2+x+2$ est continue, la limite ℓ de u vérifierait nécessairement $\ell=\ell^2+\ell+2$ càd $\ell^2+2=0$ ce qui est impossible. Cette suite est donc divergente (Elle peut éventuellement avoir une limite infinie; à ce stade on n'en sait rien).

Sources :
Les cours de M. Dupont, de M. Lux et de Mme Dubois, que je remercie ici, le livre Sésamath, le livre Math'x, le livre Déclic et l'excellent site http://xmaths.free.fr/ de Xavier Delahaye.

Objectifs pour le chapitre sur les suites en TS

Liste à cocher au fur et à mesure de vos révisions

Objectifs en Première S

Généralités sur les suites

- ☐ Savoir modéliser une situation par une suite
- ☐ Savoir calculer à la main des termes d'une suite à partir de sa définition explicite ou par récurrence.
- ☐ Bien faire la différence entre l'indice n et le nombre u_n.
- ☐ Savoir déterminer le sens de variation d'une suite.
- ☐ Savoir obtenir un tableau de valeur d'une suite à la calculatrice ainsi que sa représentation graphique. Fiches sur l'utilisation des calculatrices : http://xmaths.free.fr/tice/calculatrice/fiches.htm
- ☐ Savoir lire et comprendre des algorithme permettant de calculer un terme de rang donné ou l'indice à partir duquel la suite dépasse une valeur donnée
- ☐ Utiliser une suite auxiliaire pour obtenir une formule explicite (suites arithmo-géométrique par exemple)

Suites arithmétiques et géométriques

- ☐ Savoir reconnaître une suite arithmétique et une suite géométrique.
- ☐ Savoir prouver qu'une suite n'est PAS arithmétique ou PAS géométrique. *[Rédaction : voir exemples 9 et 13]*
- ☐ Savoir donner une écriture explicite (c'est-à-dire u_n en fonction de n) pour une suite arithmétique et une suite géométrique connaissant un terme et la raison.
- ☐ Savoir déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique et une suite géométrique.
- ☐ Savoir calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique et une suite géométrique.

Objectifs additionnels en TS

- ☐ Savoir retrouver les démonstrations des ROC du cours et faire des démonstrations similaires à ces modèles.
- ☐ Savoir faire un raisonnement par récurrence.
- ☐ Connaître les limites des suites de référence y compris les suites géométriques.
- ☐ Savoir manipuler les inégalités pour obtenir des majorations, des minorations ou des encadrements de suites. [Rien de nouveau au niveau des manipulations d'inégalités depuis la seconde].
- ☐ Lors d'un calcul de limites, savoir reconnaître une forme indéterminée et savoir « *lever l'indétermination* » (en factorisant et simplifiant par exemple).
- ☐ Savoir utiliser des majorations, des minorations ou des encadrements d'une suite pour trouver sa limite via les théorèmes de comparaison.
- ☐ Savoir utiliser un graphique sur lequel figure la première bissectrice (càd la droite d'équation $y=x$) pour visualiser les termes de la suite (sans faire aucun calcul !) et pour faire des conjectures sur le sens de variation de et sa limite.
- ☐ Savoir que si (u_n) est définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ et si f est continue alors la limite de (u_n), si elle existe, vérifie forcément $\ell=f(\ell)$.
- ☐ ▣ Savoir écrire un algorithme qui pour une suite croissante détermine à partir de quel terme elle atteint ou dépasse une valeur donnée.

TD, savoir-faire :
Construction des termes d'une suite récurrente sur un des axes au moyen de la première bissectrice.

On note f la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. La suite est $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0=-0{,}8$ et pour tout $n\geqslant 0$, $u_{n+1}=f(u_n)$. Le but est de représenter les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses sans les calculer.

I - Construction des premiers termes sur l'axe des abscisses

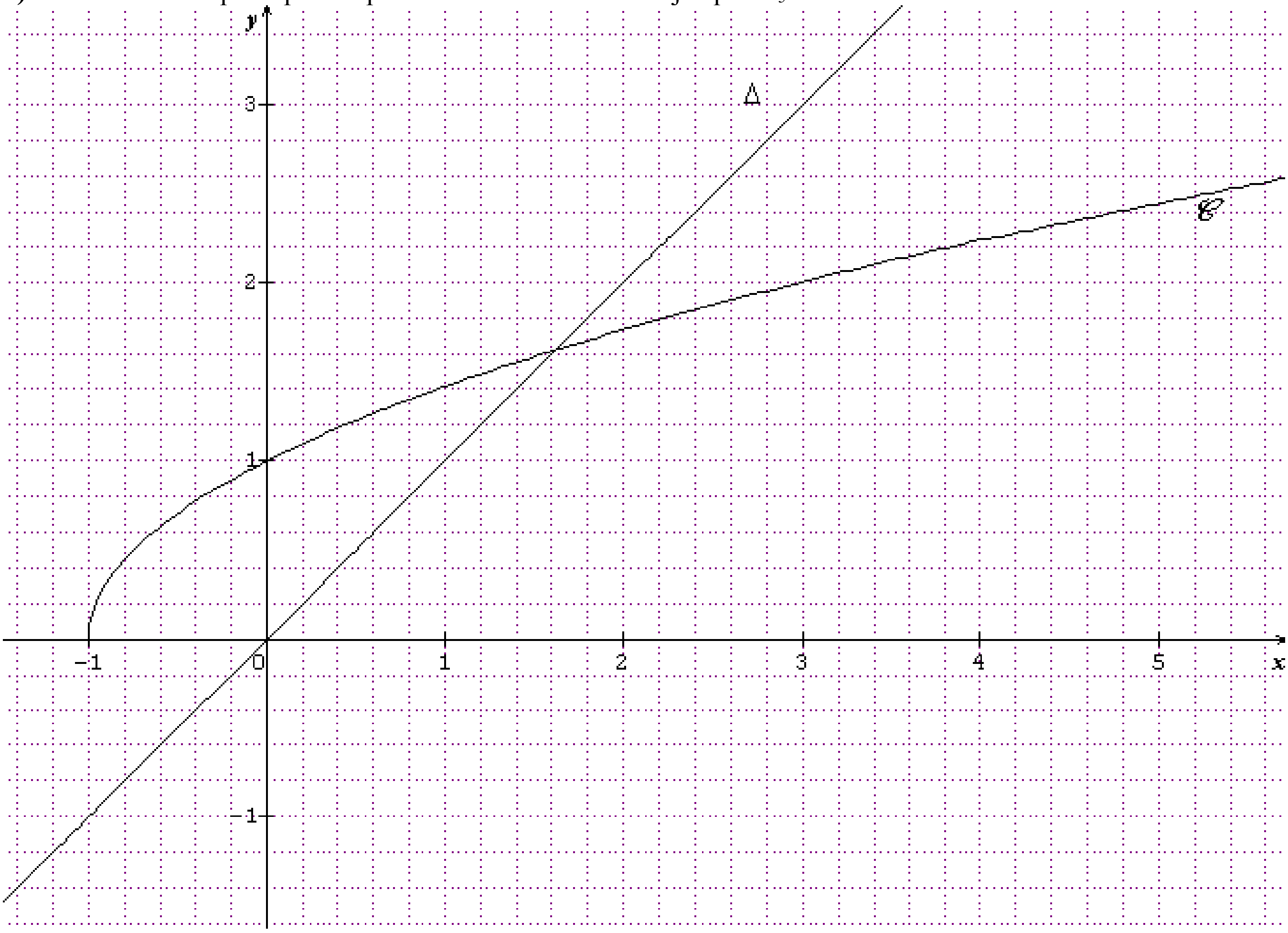
Sur le dessin ci-dessous la droite Δ a pour équation $y=x$.

1) Placer u_0 sur l'axe des abscisses. Sachant que $u_1=f(u_0)$, construire u_1 sur l'axe des ordonnées.

2) Soit A_1 le point de Δ d'ordonnée u_1. Quelle est son abscisse ? Placer u_1 sur l'axe des abscisses.

3) Sachant que $u_2=f(u_1)$, construire u_2 sur l'axe des ordonnées puis sur l'axe des abscisses.

4) Construire ainsi pas à pas les premiers termes de la suite jusqu'à u_5 sur l'axe des abscisses.



II – Influence du premier terme :

1) Construire (sur l'axe des abscisses) sur le même graphique mais d'une autre couleur les termes v_0, v_1, v_2, v_3 et v_4 de la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $v_0 = 4$ et pour tout $n\geqslant 0$, $v_{n+1}=f(v_n)$.

2) Quel sens de variation peut-on conjecturer pour $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$?

3) Les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ semblent-elles être convergentes ? Si oui, conjecturer leur(s) limite(s).

III – Même chose à la calculatrice :

Installez-vous tranquillement chez vous avec votre calculatrice et son mode d'emploi jusqu'à obtenir ce même diagramme à la calculatrice. (*TI 89 : Dans le menu 'Y =', choisir F7 → axes → Web*).

Annexes :
Fiches méthode sur l'utilisation de la calculatrice : http://xmaths.free.fr/tice/calculatrice/fiches.htm
Fiche méthode sur les suites: http://www.ilemaths.net/maths_1_suite_cours2.php

♠ Démonstration de P15.

$S = P + (P + r) + (P + 2r) + \ldots + (D - 2r) + (D - r) + D$ (somme de N termes)

$\underline{S = D + (D - r) + (D - 2r) + \ldots + (P + 2r) + (P + r) + P}$ (La même somme)

$2S = (P + D) + (P + D) + (P + D) + \ldots + (P + D) + (P + D) + (P + D)$ (en ajoutant membre à membre)

Cette somme comprend N termes tous égaux à $P + D$ d'où $2S = N(P + D)$ cqfd.

Corrigé des exemples du cours

♠ Corrigé de l'exemple Erreur : source de la référence non trouvée.