Variables aléatoires continues : Loi uniforme et quelques autres......

Quand les probabilités rencontrent les intégrales

♠ Exercice 1. [Source : J. Mugnier]

Jacques attend Madeleine (il a apporté du lilas car Madeleine, elle aime bien ça). Toutefois Madeleine n'est pas très ponctuelle.

1) Une première modélisation du comportement de Madeleine : On suppose dans cette question qu'elle arrive à un instant au hasard entre 8 h et 10 h. On note H la variable aléatoire représentant son heure d'arrivée.

a) Quelle est la probabilité qu'elle arrive entre 8h et 8h30 ? entre 9h et 9h30 ? entre 9h et 9h01 ? à 9h pile?

b) Sachant que Madeleine n'est pas arrivée pendant la première demi-heure, quelle est la probabilité qu'elle arrive dans la première heure ?

c) Montrer que pour tout couple $(a;b)$ avec $8 \leqslant a \leqslant b \leqslant 10$, on a $P(a \leq H \leq b)=\int_a^b \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$

d) Calculer l'espérance de H. Que représente la variable aléatoire $H-9$?

e) Déterminer h de sorte que $P(9-h \leqslant H \leqslant 9+h)=0{,}9$.

2) Une deuxième modélisation du comportement de Madeleine : On suppose dans cette question que la variable aléatoire H' correspondant à l'heure d'arrivée de Madeleine a pour densité la fonction suivante $\begin{cases} f(x)=x-8 & si\, x\in[8;9] \\ f(x)=10-x & si\, x\in]9;10] \end{cases}$

a) Vérifier que cette fonction est bien a densité d'une loi de probabilité.

b) Calculer à l'aide de la calculatrice ***l'espérance de H'*** notée $E(H')=\int_8^{10} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$. Ce résultat était-il prévisible ?

c) Reprendre les questions 1a, 1b et 1e.

d) Représenter la fonction F définie sur l'ensemble des réels par $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

3) Une troisième modélisation du comportement de Madeleine : On suppose dans cette question que la variable aléatoire H'' correspondant à l'heure d'arrivée de Madeleine a pour densité la fonction suivante $\begin{cases} g(x)=\frac{3}{4} & si\, x\in\left[8;8+\frac{2}{3}\right] \\ g(x)=-\frac{9}{16}x+\frac{45}{8} & si\, x\in\left]8+\frac{2}{3};10\right] \end{cases}$

a) Vérifier que cette fonction est bien a densité d'une loi de probabilité.

b) Calculer à l'aide de la calculatrice l'espérance de H'' notée $E(H'')=\int_8^{10} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$. Ce résultat était-il prévisible ?

c) Reprendre les questions 1a et 1b.

d) Représenter la fonction F définie sur l'ensemble des réels par $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Variables Aléatoires Continues — T.S.

I. Variables aléatoires continues - Lois de probabilité à densité

A. Pourquoi a-t-on besoin d'une nouvelle sorte de variables aléatoires ?

■ Jusqu'à présent nous n'avons étudié que des variables aléatoires ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, par exemple

- *le numéro de la face obtenu en lançant un dé (L'ensemble des valeurs que peut prendre la v.a. est* $\{1;2;3;4;5;6\}$. *)*
- *le nombre de fois où on obtient « Pile » en lançant une pièce 10 fois de suite (L'ensemble des valeurs que peut prendre la v.a. est* $\{0;1;2;...;10\}$. *) ;*
- *plus généralement, le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli où l'expérience est répétée n fois (L'ensemble des valeurs que peut prendre la v.a. est* $\{0;1;2;...;n\}$. *).*

… mais, par exemple :

- *la durée de vie d'une ampoule est une variable aléatoire qui peut à priori prendre n'importe quelle valeur dans* $[0;+\infty]$.
- *choisir un nombre aléatoire choisi* $[0;1[$ *définit une variable aléatoire qui peut prendre n'importe quelle valeur dans (ben oui, forcément)* $[0;1[$. *(donné par la commande Random() d'Algobox ou Ran de votre calculatrice)*
- *la taille d'un individu est une variable aléatoire à valeurs dans* $[0\,cm;250\,cm]$.

■ On a défini la ***loi*** d'une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs par la liste des probabilités qu'elle prenne chacune des valeurs (liste donnée souvent sous forme de tableau). Par exemple, si X est le gain à un jeu où on gagne 2 € avec une probabilité de 0,3 et où on perd 1 € avec une probabilité de 0,7 la loi de X est donnée par le tableau ci-dessous. A partir de la loi, on peut calculer l'espérance de X.

x_i *(les valeurs que peut prendre X)*	2 €	-1 €
$P(X=x_i)$ *(la probabilité que X prenne cette valeur)*	0,3	0,7

On ne pourra plus faire un tel tableau si X prend une infinité de valeurs.

A la place, dans le cas d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans un intervalle de $\mathbb{R}$, pour décrire X, il suffit de donner une façon de calculer la probabilité de tous les événements du type « *X prend ses valeurs dans l'intervalle J* », notée $P(X\in J)$.

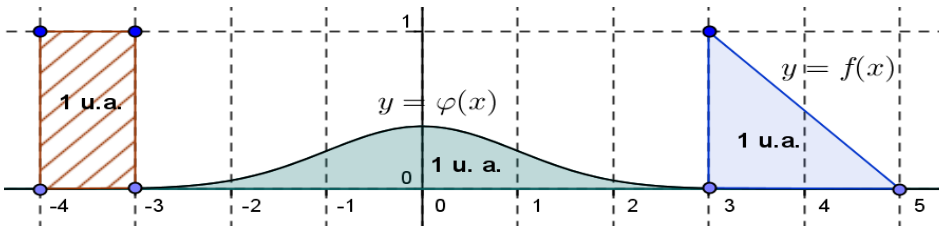
Il faudra aussi voir comment calculer ***l'espérance*** d'une telle v.a. (variable aléatoire) à partir de sa loi.

B. Variables aléatoires continues

Dans ce paragraphe I désigne un intervalle borné ou non de $\mathbb{R}$. On peut avoir par exemple I= $[0;+\infty]$ ou I= $[0;1[$ ou I= $[0\,cm;250\,cm]$ ou $I=\mathbb{R}$.

Définition 1. On appelle ***densité de probabilité sur I*** toute fonction f définie sur I telle que
- f est continue et positive sur I.
- L'aire sous la courbe représentative de f est égale à 1 u.a. (unité d'aire).

Exemples : φ et f représentées ci-contre sont des densités de probabilités sur $\mathbb{R}$.



Définition 2. Soit f une densité de probabilité sur I.

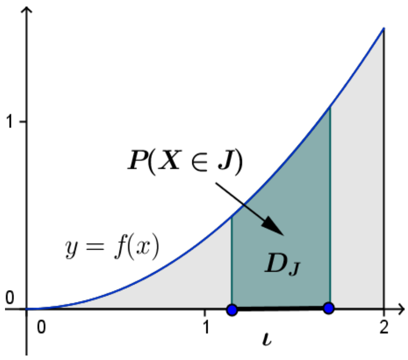
▪ Dire que ***la variable aléatoire X suit la loi de densité f*** sur I signifie que pour tout intervalle J contenu dans I, on a

$$P(X\in J)=aire(D_J)=\int_J f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

▪ En particulier pour tout intervalle $[\alpha;\beta]$ inclus dans I,

$$P(\alpha\leq X\leq\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

▪ On dit alors que X est une ***variable aléatoire continue*** ou une ***variable aléatoire suivant une loi de probabilité à densité***.



Remarque: Choisir f , c'est choisir une modélisation de la situation (c.f. Madeleine....).

Conséquences 3.

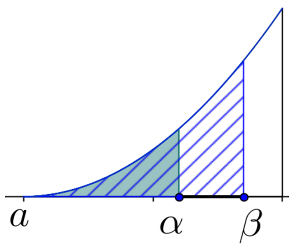
▪ $\forall\alpha\in I\,,P(X=\alpha)=0$ car $P(X=\alpha)=P(\alpha\leq X\leq\alpha)=\int_\alpha^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

La probabilité que X prenne une valeur isolée étant nulle, on a

▪ $\forall\alpha,\beta\in I\,,P(X\in[\alpha;\beta])=P(X\in[\alpha;\beta[)=P(X\in]\alpha;\beta[)=P(X\in]\alpha;\beta])$.

▪ Si $I=[a;b],\forall\alpha,\beta\in I$, par la relation de Chasles pour les intégrales,

$$P(X\in[\alpha;\beta])=\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x=P(X\leq\beta)-P(X\leq\alpha)$$



Prolongement des formules vues en seconde :

Loi de probabilité discrète	Loi de probabilité continue
Quels que soient les événements A et B $P(\overline{A})=1-P(A)$. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$	Quels que soient les intervalles J et K contenus dans I, $P(X\notin J)=1-P(X\in J)$. $P(X\in J\cup K)=P(X\in J)+P(X\in K)-P(X\in J\cap K)$

C. Espérance, variance et écart type d'une variable aléatoire continue

On prolonge les notions d'espérance et de variance que l'on avait pour les variables aléatoires ne prenant qu'un nombre fini de valeurs :

Définition 4.

▪ ***L'espérance*** mathématique d'une variable aléatoire continue X dont la densité de probabilité f est définie sur un intervalle $I=[a;b]$ (avec $a<b$) est le nombre

$$E(X)=\int_a^b x\times f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

▪ Sa ***variance*** est définie par $V(X)\stackrel{\text{def}}{=}E([X-E(X)]^2)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

▪ Son ***écart type*** est définie par $\sigma(X)\stackrel{\text{def}}{=}\sqrt{V(X)}$.

On retrouve des propriétés de la variance $V(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire discrète :

Définition et propriétés 5.

▪ L'espérance est linéaire : $\forall a,b\in\mathbb{R},\ E(aX+b)=a\,E(X)+b$

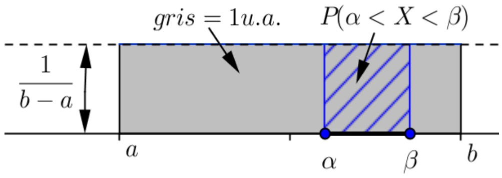
▪ Variance et écart type : $\forall a,b\in\mathbb{R},\ V(aX+b)=a^2V(X)$ d'où $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

Étudions maintenant deux cas particuliers importants de lois de probabilité à densité : Les lois uniformes et les lois lois normales.

II. Lois uniformes

Définition 6. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi ***uniforme*** sur $I=[a;b]$ (avec $a<b$) lorsque sa densité de probabilité f est une fonction <u>constante</u>.
Comme l'aire sous la courbe de f doit être égale à 1, cela impose $\forall x\in[a;b],\ f(x)=\dfrac{1}{b-a}$.

Conséquence 7. Pour tout intervalle $[\alpha;\beta]$ inclus dans I, $P(\alpha\leq X\leq\beta)=\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\beta-\alpha}{b-a}=\frac{\textit{longueur de } J}{\textit{longueur de } I}$.



La probabilité que X soit dans un intervalle J est proportionnelle à la longueur de J.

♠ Exercice 2. On choisit un nombre au hasard dans l'intervalle $[-2;3]$. La probabilité que le nombre choisi soit positif est . . . .

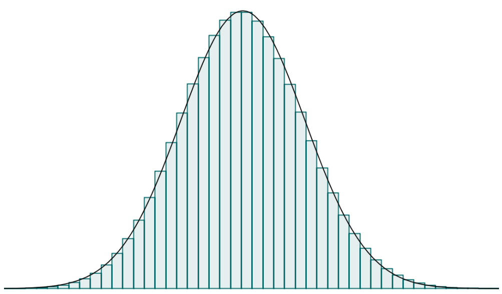
Propriété 8. Si une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $I=[a;b]$ (avec $a<b$), alors son espérance est $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$.

III. Lois normales

Quand on regarde le taux de cholestérol, ou le QI d'un grand nombre d'individus et qu'on construit le diagramme des fréquences, on observe que les fréquences se répartissent selon une « courbe en cloche» en raison de légères variations d'un individu à l'autre.

Cette même allure apparaît quand on observe par exemple le poids d'étagères d'un modèle donné qui sortent d'une usine, ou leur hauteur (il y a toujours de petites variations autour de la taille prévue).

Bref, le modèle mathématique de la loi normale couvre de très nombreux phénomènes, d'où le nom de « normal ».



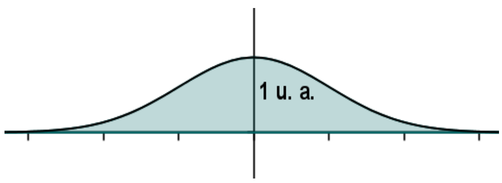
A. <u>Cas particulier: Loi normale centrée réduite</u>

1. <u>Définition et paramètres de la loi normale centrée réduite</u>

Propriété 9. *(admise)* La fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité de probabilité.

Autrement dit, elle est continue sur $\mathbb{R}$, positive sur $\mathbb{R}$ et l'aire sous la courbe vaut 1 u. a.

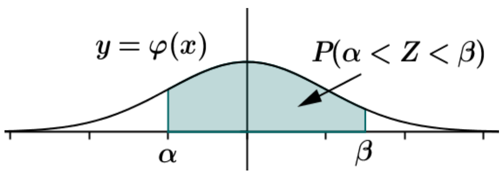
(au sens $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=1$)



Remarque : φ est paire donc C_{φ} est symétrique par rapport à (Oy).

Définition 10. Une variable aléatoire Z suit une ***loi normale centrée réduite***, notée $\mathcal{N}(0;1)$ ssi elle admet la fonction φ comme densité de probabilité.
Autrement dit, pour tout intervalle $[\alpha;\beta]$ inclus dans I,
$P(\alpha\leq Z\leq\beta)=P(\alpha<Z<\beta)=P(\alpha<Z\leq\beta)=\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

On dit que **Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$**.



Propriété [11]. Paramètres d'une loi normale centrée réduite *(admis):*

Si une variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite, alors

▪ son espérance est $E(Z)=0$ (d'où le qualificatif « ***centrée*** ») ;

Elle est définie par $E(Z) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^0 t\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \lim\limits_{y \to +\infty} \int_0^y t\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

▪ sa variance est $V(Z)=1$ (d'où le qualificatif «***réduite*** »).

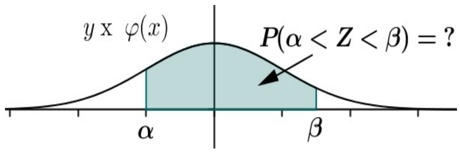
Elle est définie par $V(Z) \overset{\text{def}}{=} E([Z-E(Z)]^2)$.

2. Comment calculer la probabilités qu'une v.a. suivant une loi normale centrée réduite appartienne à un intervalle donné ?

Ce paragraphe explique comment trouver la probabilité que Z appartienne à un intervalle donné (on connaît l'intervalle, et on cherche sa probabilité).

Il n'existe pas de formule utilisant les fonctions usuelles qui permet de calculer les probabilités quand Z suit une loi normale. On est donc obligé d'utiliser la calculatrice.

■ *Pour calculer la probabilité* $P(\alpha \leq Z \leq \beta)$ *, avec ma calculatrice, on tape . . . .*

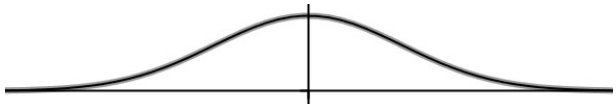


Voir rabats de couverture du livre Déclic.

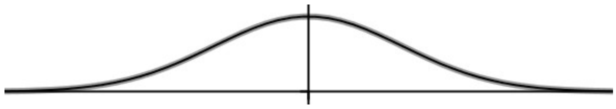
La plupart des calculatrices ne calculent que de probabilités de la forme $P(\alpha \leq Z \leq \beta)$ *, donc pour calculer par exemple* $P(Z \leq \beta)$ *ou* $P(Z \geq \alpha)$ *, il faut se ramener à des calculs de cette forme. Pour cela on fait des petits dessins (voir ci-dessous) desquels on déduit les formules suivantes :*

■ **Propriétés [12]. Pour calculer des probabilités à la calculatrice lorsque Z suit une loi normale** (A savoir retrouver graphiquement!)

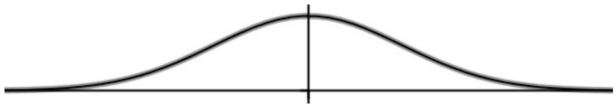
▪ Si $\beta > 0$, $P(Z<\beta) = \frac{1}{2} + \ldots$



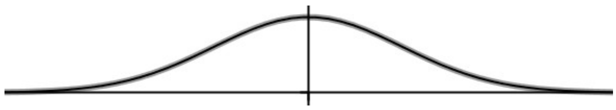
▪ Si $\beta < 0$, $P(Z<\beta) = \frac{1}{2} - \ldots$



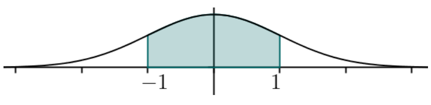
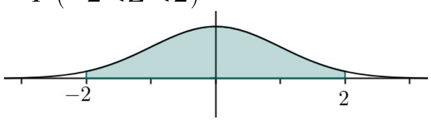
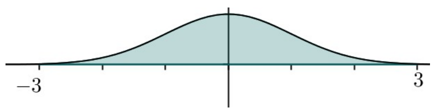
▪ Si $\alpha > 0$, $P(Z>\alpha) = \ldots$



▪ Si $\alpha < 0$, $P(Z>\alpha) = \ldots$



■ **Valeurs remarquables** [13] (et exercice, à vos calculatrices !)

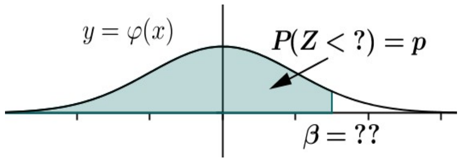
1σ	2σ	3σ
▪ $P(-1 \leqslant Z \leqslant 1) \approx$ 	▪ $P(-2 \leqslant Z \leqslant 2) \approx$ 	▪ $P(-3 \leqslant Z \leqslant 3) \approx$ 

3. Trouver un intervalle de probabilité donnée avec la loi normale centrée réduite

Le problème est l'inverse de celui du paragraphe précédent : On connaît la probabilité, et on cherche un intervalle correspondant.

■ **Lecture inverse de la loi normale centrée réduite** : Étant donné un nombre $p \in [0;1]$, si Z suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$, les calculatrices permettent de trouver LE réel β tel que $P(Z \leq \beta) = p$.

Pour calculer LE réel β tel que $P(Z \leq \beta) = p$, avec ma calculatrice, on tape . . . .



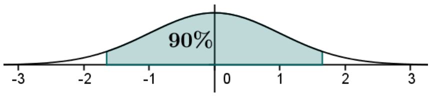
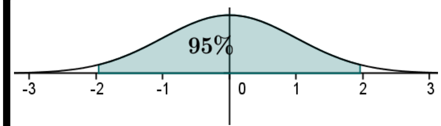
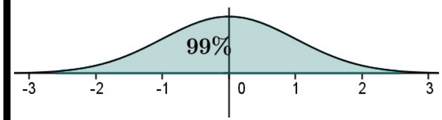
Voir rabats de couverture du livre Déclic.

■ **Quand on choisit le niveau d'incertitude/la marge d'erreur *e* et qu'on veut en déduire l'intervalle centré sur 0 où doit se trouver Z.**

Propriété [14]. [▣ ROC!]
Soit Z une v.a. qui suit une loi normale centrée réduite et soit $e \in]0;1[$. Il existe un unique nombre strictement positif u_e tel que $P(-u_e \leqslant Z \leqslant u_e) = 1 - e$

Ce ROC sera fait dans le chapitres « Intégrales et primitives ».

Applications [15]. Valeurs à connaître IMPERATIVEMENT (surtout le 1,96)

90%	***95%***	***99%***
▪ La valeur de $u_{0,1}$ telle que $P(-u_{0,1} \leqslant Z \leqslant u_{0,1}) = 0{,}90$ est $\boldsymbol{u_{0,1} \approx 1{,}65}$ 	▪ La valeur de $u_{0,05}$ telle que $P(-u_{0,05} \leqslant Z \leqslant u_{0,05}) = 0{,}95$ est $\boldsymbol{u_{0,05} \approx 1{,}96}$ 	▪ La valeur de $u_{0,01}$ telle que $P(-u_{0,01} \leqslant Z \leqslant u_{0,01}) = 0{,}99$ est $\boldsymbol{u_{0,01} \approx 2{,}58}$ 
*«Avec une loi normale, pour avoir une probabilité de **90%**, il faut prendre **1,65** écart-type de part et d'autre de la moyenne. »*	*«Avec une loi normale, pour avoir une probabilité de **95%**, il faut prendre **1,96** écart-type de part et d'autre de la moyenne. »*	*«Avec une loi normale, pour avoir une probabilité de **99%**, il faut prendre **2,58** écart-type de part et d'autre de la moyenne. »*

B. Loi normale dans le cas général

1. Définitions

Définition [16]. Soit μ un réel quelconque et σ un nombre strictement positif.
▪ Une variable aléatoire X suit une ***loi normale de paramètres*** μ ***et*** σ^2 ssi la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
▪ On dit que X **suit la loi** $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

On va déduire les propriétés de la loi normale générale de celles de la loi centrée réduite en utilisant les résultats suivants :

Propriétés [17]. Soit μ un réel quelconque et σ un nombre strictement positif.

▪ X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

▪ Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1) \Leftrightarrow X = \sigma Z + \mu$ suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

▪ Si $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, alors $-1 \leqslant Z \leqslant 1 \Leftrightarrow \mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu - \sigma$ et $-2 \leqslant Z \leqslant 2 \Leftrightarrow \mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu - 2\sigma$ ...etc.

♠ Exemples d'utilisation (et exercice) 3.

(1) Si X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, la valeur de $u_{0,05}$ telle que $P(\mu - u_{0,05}\sigma \leqslant X \leqslant \mu + u_{0,05}\sigma) = 0{,}95$ est $u_{0,05} \approx 1{,}96$. *(Prouvez-le sans calculatrice!) On retrouve « Avec une loi normale, pour avoir une probabilité de **95%**, il faut prendre **1,96** écart-type de part et d'autre de la moyenne. »*

(2) Si X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$. *(Prouvez-le sans calculatrice!).*

2. Paramètres : Espérance et variance

Propriété [18]. Une v.a. X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ a pour espérance μ, pour variance σ^2 et pour écart type σ.

Conséquence directes des propriétés [5].

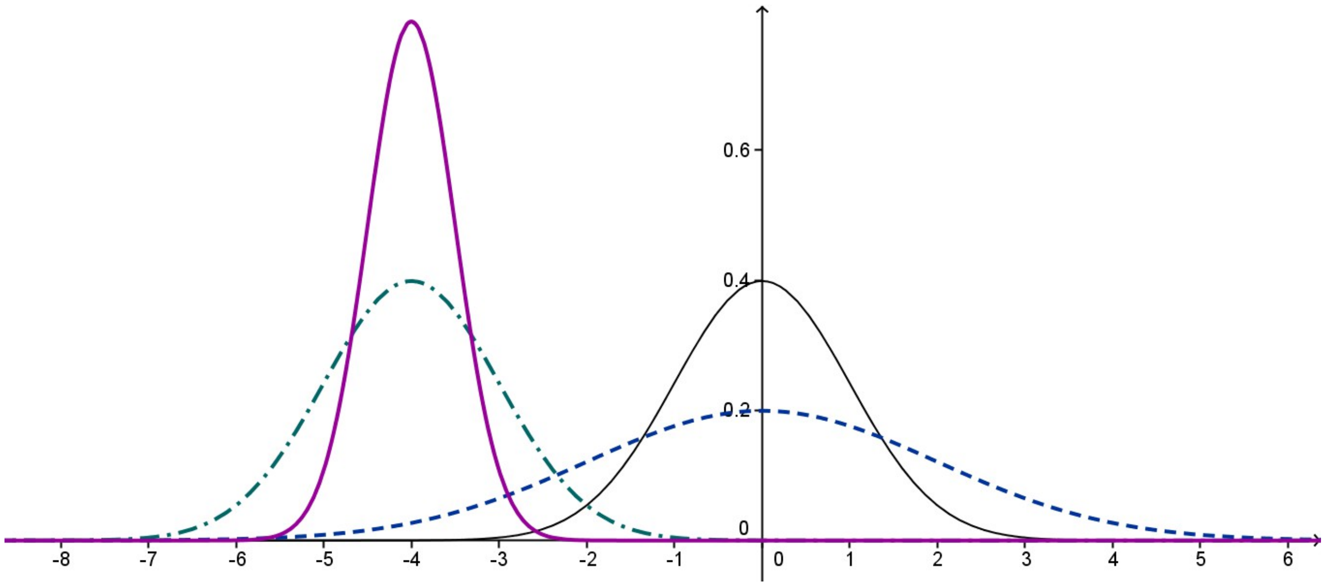
3. Allure des courbes de densité : Toutes des cloches, d'autant plus aplaties que l'écart type est grand

Remarques [19]. Soit μ un réel quelconque et σ un nombre strictement positif. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres μ et σ^2.

- La loi de X admet pour densité de probabilité la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ (*vous n'avez pas à connaître cette formule. Elle sert juste à expliquer que les courbes ont toutes la même allure car elles ont été fabriquées à partir de la même fonction.*)
- Ces densités de probabilité sont toutes représentées par des « courbes en cloche », d'axe de symétrie la droite verticale d'équation $x=\mu$. Plus σ est grand, plus la courbe est large (valeurs plus dispersées) et plus le sommet est bas. (forcément puisque l'aire sous la courbe est toujours égale à 1 u.a.).

♠ Exercice 4. Pour visualiser l'effet d'une modification des paramètres.

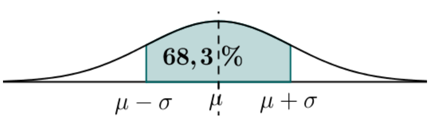
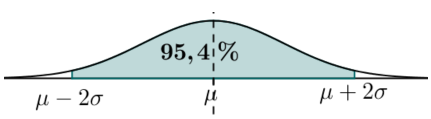
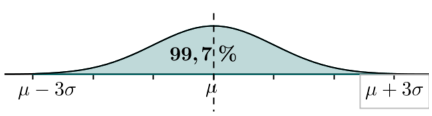
Sur la figure ci-dessous, indiquer l'écart type et l'espérance correspondant à chaque courbe en plaçant les étiquettes suivantes : $\boxed{\mu=0}$, $\boxed{\mu=-4}$, $\boxed{\sigma=1}$, $\boxed{\sigma=1/2}$ et $\boxed{\sigma=2}$ (Une étiquette peut servir plusieurs fois.)



4. Comment calculer la probabilités qu'une v.a. suivant une loi normale centrée réduite appartienne à un intervalle donné ?

■ Comme pour la loi normale centrée réduite, la calculatrice le fait, quitte à modifier l'écriture de la probabilité cherchée pour faire apparaître ce que sait calculer la machine, voir [11].

■ **Valeurs remarquables** [**20**] qui permettent de se faire une idée intuitive de ce qu'est l'écart-type :

1σ	2σ	3σ
▪ $P(\mu-\sigma \leqslant Z \leqslant \mu-\sigma) \approx 0{,}683$  *« Si on prend **1** écart-type de part et d'autre de la moyenne, on a une probabilité de **68,3%**. »*	▪ $P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0{,}954$  *« Si on prend **2** écart-types de part et d'autre de la moyenne, on a une probabilité de **95,4%** .»*	▪ $P(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \approx 0{,}997$  *« Si on prend **3** écart-types de part et d'autre de la moyenne, on a une probabilité de **99,7%** .»*

Se déduisent de [13] et [17].

5. Trouver un intervalle de probabilité donnée avec la loi normale générale: Sur le thème « Y'a pas de problèmes, y'a que des solutions ! »

● **Aïe, aïe, aïe !** Étant donné un nombre $p\in[0;1]$, si Z suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$, les calculatrices permettent de trouver LE réel β tel que $P(Z\leq\beta)=p$ …. mais pour certaines calculatrices (anciens modèles), cela ne marche QUE pour la loi $\mathcal{N}(0;1)$ et pas pour $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

● **Comment faire si la loi n'est pas centrée ou pas réduite ?** Et bien on centre (càd qu'on se ramène à une espérance de 0) et on réduit (càd qu'on se ramène à une variance de 1) bien sûr !

Supposons que X suive la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ et que l'on cherche LE réel β tel que $P(X\leq\beta)=p$.

$X\leq\beta \Leftrightarrow Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{\beta-\mu}{\sigma}$ et comme Z suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$, la calculatrice nous fournit aimablement une valeur approchée de $\frac{\beta-\mu}{\sigma}$ et on en déduit β.

IV. Liens entre probabilités discrètes et continues

variable aléatoire continue (prend un nombre infini de valeurs)	variable aléatoire discrète (prend un nombre fini de valeurs)
L'aire totale sous la courbe vaut 1; $P(X\in\mathbb{R})=1$.	La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1 ; $P(\Omega)=1$
Quels que soient les intervalles J et K contenus dans I, $P(X\notin J)=1-P(X\in J)$. $P(X\in J\cup K)=P(X\in J)+P(X\in K)-P(X\in J\cap K)$ *Probabilités conditionnelles* : Si $P(X\in K)\neq 0,\ P_{[X\in K]}(X\in J)=\frac{P(X\in J\cap K)}{P(X\in K)}$	Quels que soient les événements A et B, $P(\overline{A})=1-P(A)$. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ *Probabilités conditionnelles* : Si $P(B)\neq 0,\ P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
$E(X)=\int_a^b x\times f(x)\,\mathrm{d}x$ $\forall a,b\in\mathbb{R},\ E(aX+b)=aE(X)+b$	$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i\times p_i=\sum_{i=1}^{n} x_i\times P(X=x_i)$ $\forall a,b\in\mathbb{R},\ E(aX+b)=aE(X)+b$
$V(X)\stackrel{\text{def}}{=}E([X-E(X)]^2)=E(X^2)-[E(X)]^2$ $\forall a,b\in\mathbb{R},\ V(aX+b)=a^2V(X)$ d'où $\sigma(aX+b)=\lvert a\rvert\sigma(X)$	$V(X)\stackrel{\text{def}}{=}E([X-E(X)]^2)=E(X^2)-[E(X)]^2$ $\forall a,b\in\mathbb{R},\ V(aX+b)=a^2V(X)$ d'où $\sigma(aX+b)=\lvert a\rvert\sigma(X)$

Sources : Documents de Julien Mugnier, manuel Transmaths, manuel Math'x, manuel Repères.

Table des matières

EXERCICES VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES (épisode 1 : l'aventure *continue*)

EXERCICE 1

On considère la fonction *f* définie sur $[0;1]$ par : $f(x)=3x^2$.

1. Justifier que *f* est la densité d'une loi de probabilité.
2. On note X la variable aléatoire à valeurs sur $[0;1]$ dont la loi de probabilité a pour densité *f*.

Calculer à l'aide de la calculatrice $P(X\geq 0{,}5)$, $P(X<0{,}1)$, $P(0{,}2<X<0{,}8)$ et $E(X)$.

EXERCICE 2

On considère la fonction *f* définie sur $[-1;1]$ par : $f(x)=a(1-x^2)$ où $a\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer a pour que *f* soit la densité d'une loi de probabilité sur $[-1;1]$.
2. Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité a pour densité *f*. Que vaut $E(X)$?

a. Montrer que $P(-t\leq X\leq t)=1-2P(X>t)$

b. Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de t tel que : $P(-t\leq X\leq t)=0{,}5$.

EXERCICE 3

Dans un parc national, un guide accompagne chaque soir un groupe pour observer des zébus venant s'abreuver dans un lac au coucher du soleil.

On suppose que le temps d'attente du groupe avant l'arrivée des animaux est compris entre 0 et 2 heures 30 ; on le modélise, en minutes, par une variable aléatoire T de loi uniforme.

1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par T ?
2. Calculer $P(T=20)$, $P(T\leq 45)$, $P(-45<T<60)$ et $P(T\geq 90)$.
3. Le groupe attend en vain depuis 50 minutes. Quelle est la probabilité que le temps d'attente supplémentaire du groupe soit inférieur à 10 mn ?

EXERCICE 4

La courbe (C) est, dans un repère orthonormé, l'arc de parabole d'équation $y=x^2$ avec $-1\leq x\leq 1$.

On choisit un nombre t dans l'intervalle $[-1;1]$ selon la loi uniforme et on place M le point de la courbe (C) d'abscisse t. On note S la variable aléatoire qui donne l'aire en u.a; du triangle AMB.

1. Quelles sont les valeurs prises par S ? Calculer : $P(S\leq 0{,}25)$, $P(S>0{,}5)$ et $P(S=1)$.
2. Déterminer le nombre t tel que : $P(S\leq t)=0{,}5$.
3. Déterminer la valeur moyenne prise par la quantité S.

EXERCICE 5

En cours de math, C*** finit toujours par jeter un oeil sur les jambes de M** ! La durée exprimée en minutes entre le début dudit cours et le premier regard posé sur les mollets de l'*innocente* demoiselle est une variable aléatoire R qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$. Sachant que le temps moyen avant le premier coup d'oeil est de 7 mn et que, dans 60 % des cas, les genoux de M** essuient leur première oeillade avant 8 mn, trouver *a* et *b*.

EXERCICE 6

E*** pose beaucoup de questions en cours et c'est fort louable toutefois toutes ne sont pas pertinentes. On a constaté que, à chaque heure de mathématiques, et ce, systématiquement, la première question posée était fort à propos tandis que la deuxième était totalement hors sujet. La seconde question est posée au bout de N minutes après que l'heure de cours a commencé ; cela définit une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[9;15]$. Sachant qu'il y a six heures de cours dans la semaine, calculer la probabilité qu'E*** pose en une semaine au moins une question hors sujet avant 10 mn de cours.

Propriété 21. Soit μ un réel quelconque et σ un nombre strictement positif.

▪ Une variable aléatoire X suit une ***loi normale de paramètres*** μ ***et*** σ^2 ssi la loi de X admet pour densité de probabilité la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

(utile pour tracer les cloches dans Geogebra à partir de φ)