Vecteurs | 2^{nde}

Table des matières

Exercices interactifs http://www.mathgraph32.org/ExercicesEnLigne/Seconde/Vecteurs/MultiplicationVecteur1/Page_Principale.htm et WIMS

I. Translations et Vecteurs du plan

A. Translation et vecteur associé

Activité

Figure ② [sauter 4 lignes pour la figure, écrire def et leur faire faire figure : Donner A,B et C, il s doivent placer D, puis en déduire le ③]:

Définition [1].

▪ ①À tout point C du plan, on associe, par la ***translation qui transforme A en B***, l'unique point D tel que [AD] et [BC] ont même milieu. Ceci revient à dire que ③(les faire deviner) AB**D**C est un parallélogramme, éventuellement aplati.

▪ A cette translation, on associe le ***vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ qui symbolise le déplacement de A vers B. On le représente par une flèche allant de A à B.

▪ Cette translation est appelée ***translation de vecteur*** $\overrightarrow{AB}$. On la note $t_{\overrightarrow{AB}}$.

Remarque :De même qu'on utilise souvent une seule lettre *d* pour noter la droite (AB), on utilise souvent une seule lettre pour noter un vecteur. On peut donc trouver $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

☐ Exercice(s) 5 et 6 p 310 de Repères ; [TM] Ex 1 à 4 p 310 de Repères, corrigés.

☐ Exercice(s) 8 p 310 de Repères : Représentant de $\vec{u}$ d'origine A.

B. Égalité de deux vecteurs

Égalité de deux vecteurs [2].

▪ Deux vecteurs sont ***égaux*** lorsqu'ils définissent la même translation d'où

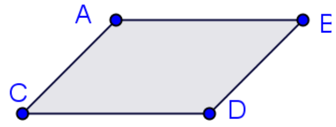
▪ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ⇔ D est l'image de C par la translation qui transforme A en B
⇔ [AD] et [BC] ont même milieu
⇔ ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati)

▪ Autrement dit, deux vecteurs sont ***égaux*** lorsqu'ils ont (les faire deviner):

- la même **direction** *(= portés par des droites parallèles)*
- le même **sens**
- la **même longueur**

☐ Exemple 1.

Dans ce parallélogramme, on peut écrire les égalités suivantes :
$\overrightarrow{AB} = \ \dots \quad ; \overrightarrow{AC} = \ \dots \quad ; \overrightarrow{DB} = \ \dots \quad ; \overrightarrow{BD} = \ \dots \quad ;$



Remarques :

- Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ revient à dire que (les faire deviner) B est le milieu de [AC].
- Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ revient à dire que (les faire deviner) B et C sont confondus (B=C).

☐ Exercice(s) 11 p 310 de Repères ;

C. Vecteur nul

Intuitivement : Le vecteur nul est le vecteur qui correspond à une translation avec laquelle rien ne bouge donc A est transformé en A, B en B....etc.

Définition [3]. Le ***vecteur nul,*** noté $\vec{0}$ est le vecteur $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots$

D. Opposé d'un vecteur

Intuitivement : L'opposé d'un vecteur est le vecteur qui correspond à « *la même translation dans l'autre sens.* »

Figure :

Définition [4].

■ On dit que deux vecteurs sont ***opposés*** (les faire deviner) lorsqu'ils ont :

- la même direction
- la même longueur
- mais PAS le même sens

■ L'opposé du vecteur $\vec{u}$ se note $-\vec{u}$. L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $-\overrightarrow{AB}$ et on a $-\overrightarrow{AB} = \dots. ?$

II. Somme et différence de deux vecteurs

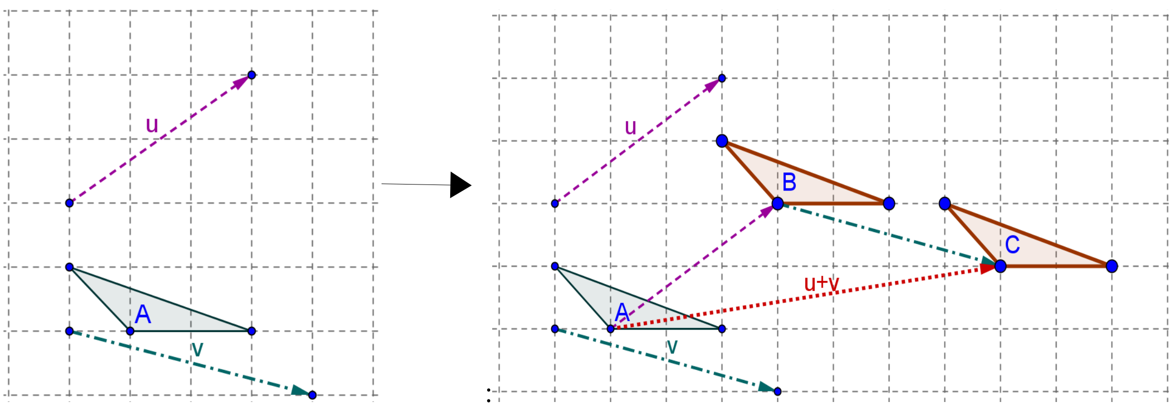
A. Addition de deux vecteurs

[Commencer la phrase, leur faire faire la figure puis compléter la phrase.]

Définition [5]. Effectuer la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$ revient à effectuer . . . . [une unique translation dont le vecteur est par définition $\vec{u} + \vec{v}$.]

☐ Activité de découverte 2. Translations successives

Le triangle T a pour image T' par la translation de vecteur $\vec{u}$ et T' a pour image T'' par la translation de vecteur $\vec{v}$. Dessiner T' et T''.



Remarque [6]. Commutativité : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Règles d'addition de deux vecteurs [7].

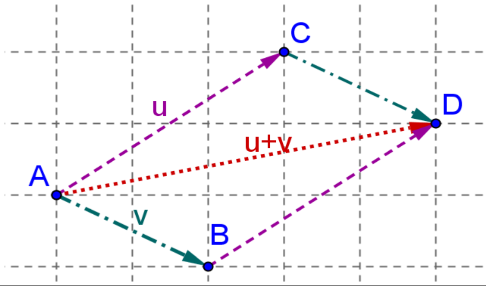
■ ***Somme de deux vecteurs en les mettant « bout à bout »*** :

Quand les deux vecteurs sont représentés par des flèches dont l'extrémité de l'une est l'origine de l'autre, on utilise la **Relation de Chasles** : Quels que soient les points A, B et C , $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Cette égalité permet de transformer une somme de deux vecteurs en un seul vecteur, et réciproquement.

■ ***Somme de deux vecteurs en prenant des représentants de même origine*** :

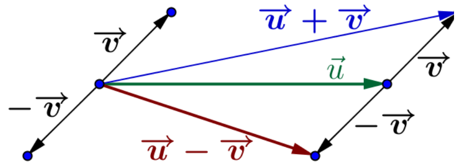
Quand les deux vecteurs sont représentés par des flèches ayant la même origine, on trace le vecteur somme en construisant un parallélogramme. C'est la **règle du parallélogramme** : Quels que soient les points A, B et C , $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, où D est le point tel que ABDC soit un parallélogramme.



B. Soustraction de deux vecteurs :

Définition [8]. Soustraire un vecteur revient à ajouter son opposé. $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.

Comme pour les relatifs : Toute soustraction est une addition qui s'ignore....



III. Coordonnées d'un vecteur

Définition [9]. Les coordonnées du vecteur u dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.

Interprétation des coordonnées d'un vecteur comme la mesure du déplacement pour aller de l'origine à l'extrémité [10]. $\vec{u}$ a pour coordonnées (3 ; 5) signifie que pour aller de A à B on se déplace de 3 unités vers la droites et 5 unités vers le haut.

Propriétés.

▪ **P 11.** Deux vecteurs sont égaux ssi ils ont les mêmes coordonnées.

▪ **P 12.** Les coordonnées de la somme de ceux vecteurs est la somme de leurs coordonnées.

Autrement dit, quelque soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

Coordonnées d'un vecteur à partir de celles de son origine et de son extrémité [13].

Si A et B ont pour coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ dans ce même repère.

☐ Exemples 3. M(-2 ; 1) I(-1 ; -2), E(2,1) et L(-1 ; 2). Nature de MIEL ? [Carré]

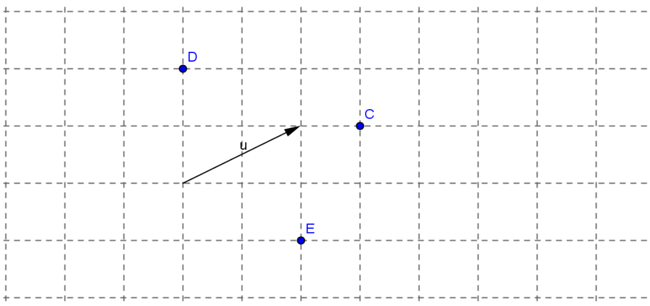
IV. Vecteurs colinéaires

A. Produit d'un vecteur par un réel

■ **Définition [14].** Soit λ [*se lit lambda*] un nombre réel et $\vec{u}$ un vecteur.
On appelle ***produit de λ par*** $\vec{u}$ le vecteur noté $\lambda\vec{u}$ caractérisé par :
◊ La même direction que $\vec{u}$;
◊ Le même sens que $\vec{u}$ si λ est positif, le sens contraire si λ est négatif ;
◊ Une ***norme*** (=longueur) égale à λ fois la norme de $\vec{u}$ si $\lambda>0$ et égale à $-\lambda\ (>0)$ fois la norme de $\vec{u}$ si $\lambda<0$.

☐ Exemple 4.

1. Placer C' tel que $\overrightarrow{CC'}=2\vec{u}$;
2. Placer D' tel que $\overrightarrow{DD'}=-3\vec{u}$;
3. Placer E' tel que $\overrightarrow{EE'}=-\dfrac{1}{2}\vec{u}$



■ **Effet sur les coordonnées [15].** Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ alors $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$ dans ce même repère.

☐ Exemple 5. A(2;-3), B(-4;5) et C(-5 ; -7). $\vec{u}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

1. Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$.
2. Déterminer les coordonnées de D tel que $\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$.

Réponses : $\overrightarrow{AB}(-6\,;8)$ $\vec{u}\left(-2\,;\dfrac{8}{3}\right)$ $\vec{D}(7\,;-23)$

B. Vecteurs colinéaires

Définition et caractérisation [16].

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires***

◊ signifie par définition qu'ils ont la même direction,

◊ **ce qui équivaut à dire** que l'un est le produit de l'autre par un réel, autrement dit, qu'il existe un réel λ tel que $\vec{u}=\lambda\vec{v}$ ou $\vec{v}=\lambda\vec{u}$;

◊ **ce qui équivaut à dire** que leurs coordonnées sont proportionnelles, autrement dit, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $xy'-yx'=0$.

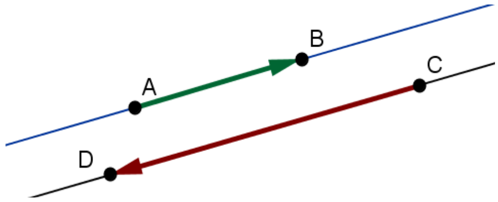
Dessiner un tableau de proportionnalité avec λ et $1/\lambda$ comme coefficients de proportionnalité.

☐ Exemple 6. $\vec{u}\begin{pmatrix}3-\sqrt{2}\\2+3\sqrt{2}\end{pmatrix}$; $\vec{v}_1\begin{pmatrix}-21+7\sqrt{2}\\-14-21\sqrt{2}\end{pmatrix}$; $\vec{v}_2\begin{pmatrix}-2+3\sqrt{2}\\6+2\sqrt{2}\end{pmatrix}$; $\vec{v}_3\begin{pmatrix}6-3\sqrt{2}\\6+9\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_4\begin{pmatrix}7\\12+11\sqrt{2}\end{pmatrix}$.
Lesquels parmi ces vecteurs sont colinéaires à $\vec{u}$?

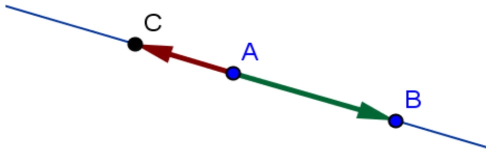
Réponses : $\vec{V_1}=-7\vec{u}$; $\vec{V_2}=\sqrt{2}\vec{u}$; $\vec{V_3}$ non colinéaire à u et $\vec{V_4}=(3+\sqrt{2})\vec{u}$.

C. Applications à la géométrie

▪ **P 17. Démontrer le parallélisme :** Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



▪ **P 18. Démontrer l'alignement :** Les points A, B et C sont alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



Exercices sur les vecteurs en seconde

2
1 Exercice 7. [TICE] Découverte de la colinéarité avec Geogebra

Partie 1

1) Avec Geogebra

a) Placer deux points A et B et tracer $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

b) Créez un curseur a .

c) Créez le vecteur $\vec{v}=a\vec{u}$.

2) Faites varier a et conjecturer le lien entre $\vec{u}$ et $\vec{v}=a\vec{u}$

a) en termes géométriques : Direction, sens, longueur ;

b) en termes de coordonnées.

Partie 2

Exercices 75 p 319 et 74 p 319

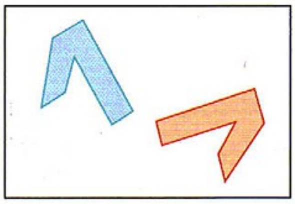
Activités d'introduction sur les vecteurs en 2nde

Exercice 1. *Je me souviens*

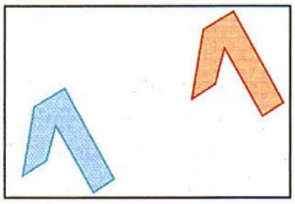
1 Avec les transformations

Dans chaque cas, préciser si une transformation connue peut permettre d'associer à la figure bleue la figure rouge.

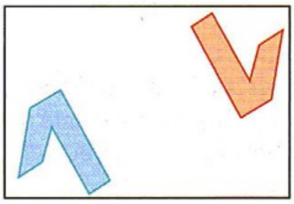
a.



b.



c.



2 Avec des coordonnées

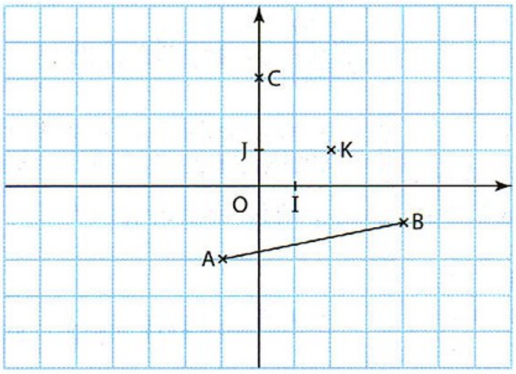
1. Par le calcul

Soit $A(-1;3)$, $B(4;-5)$, $C(1;2)$ et $D(2;-4)$.
Les segments [AB] et [CD] ont-ils le même milieu ?
Que peut-on en déduire ?

2. Par lecture graphique

Dans le repère (O, I, J), quelles sont, par lecture graphique, les coordonnées des points :

a. D tel que ABCD soit un parallélogramme ;
b. E tel que ABEC soit un parallélogramme ;
c. F tel que [AB] et [OF] aient le même milieu ;
d. G tel que [CG] et [BK] aient le même milieu.



3 Avec la proportionnalité

Ces tableaux sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

a.

2	-8
5	-20

b.

3	7
-6	-14

c.

$1-\sqrt{2}$	-1
1	$1+\sqrt{2}$

d.

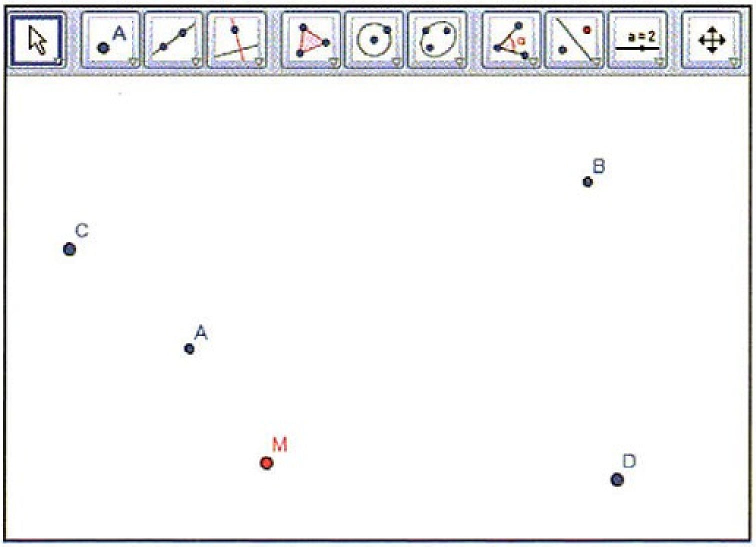
7	19
3	8

e.

12	-25
$-\frac{4}{5}$	$\frac{5}{3}$

Exercice 2. *TICE et Vecteurs I : Un nouvel outil*

a) Avec un logiciel de géométrie dynamique, placer des points libres A, B, C, D, M.



b) Par définition, **la translation qui transforme A en B** associe, à tout point M du plan, le point N tel que [BM] et [AN] aient le même milieu.

- Construire ce point N. Quelle est la nature du quadrilatère ABNM ?
- Déplacer le point M sur la droite (AB). Que constate-t-on ?

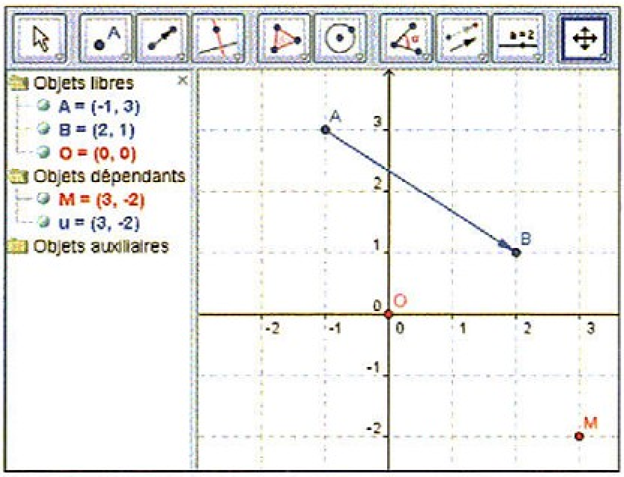
c) Le logiciel possède une instruction « Translation », mais pour l'utiliser il faut créer d'abord **un vecteur**.
Créer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis créer le point M′ associé au point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Que constate-t-on ?

d) Créer le vecteur $\overrightarrow{CD}$ et le point M_1 associé à M par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

e) Déplacer les points C et D de façon que M_1 et M′ soient confondus. Lorsque cela se produit, conjecturer la nature du quadrilatère ABCD. Démontrer cette conjecture.

Exercice 3. *TICE et Vecteurs II : Coordonnées d'un vecteur*

a) Avec le logiciel de géométrie GeoGebra, faire la figure ci-contre où M est le point associé à l'origine O du repère par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



b) Noter dans la « Fenêtre Algèbre » que les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ sont les mêmes que celles du point M.
Créer un autre vecteur $\overrightarrow{CD}$ de coordonnées $(3\,;-2)$.

c) Créer un point E tel que le vecteur $\overrightarrow{AE}$ ait pour coordonnées $(-5\,;2)$.

d) Créer un point F tel que le vecteur $\overrightarrow{AF}$ ait pour coordonnées $(-2\,;-4)$.

e) Placer le point N de coordonnées $(10\,;-3)$ et construire le point N′ tel que $\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{AB}$.

f) On donne les points $R(-1\,;-4)$ et $S(-4\,;6)$.
Conjecturer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{RS}$. Vérifier la conjecture en plaçant R et S.